

Jukka Kangasaho • Jukka Mäkinen • Juha Oikkonen •
Johannes Paasonen • Maija Salmela • Jorma Tahvanainen

Pitkä matematiikka

Polynomifunktiot



Sanoma Pro Oy
Helsinki

Tiedustelut

Sanoma Pro Oy, Helsinki

puh. 020 391 000

sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy

Tämä aineisto on digitaalinen rinnakkaisversio tuotteesta

Pitkä matematiikka 2 Polynomifunktiot ISBN 978-952-63-0555-4

6 kk lisenssi ISBN 978-952-63-1915-5

48 kk lisenssi ISBN 978-952-63-1916-2

Toimitus: Ville Sipiläinen, Riitta-Liisa Eerola

Ulkoasu: Veera Alanko

Taitto: Jukka Nieminen

Piirroksat: Picman Oy, Pekka Könönen

Kansi: Timo Jokivartio

© Jukka Kangasaho, Jukka Mäkinen, Juha Oikkonen, Johannes Paasonen,
Maija Salmela, Jorma Tahvanainen ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot

Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka
on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

Lukijalle

Pitkä matematiikka

Useimmat luonnontieteiden ja tekniikan saavutukset perustuvat matematiikan tuloksiin, niin myös yhä enemmän monet yhteiskuntatieteiden ja humanististen tieteiden oivallukset. Pelkän teoreettisen uteliaisuudenkin innoittamana löydetty matemaattinen tieto on usein osoittautunut yllättävän hyödylliseksi. Matematiikassa yhdistyy kiehtovalla tavalla kaksi piirrettä: se on luovan ajattelun ja oivaltamisen leikkiä ja samalla täsmällistä ja loogista.

Pitkä matematiikka -sarjan tavoitteena on, että oppilas matematiikan tietojen ja taitojen lisäksi oppii ymmärtämään matematiikan erityisluonteen tiedonalana, jossa teoreettinen kohtaa käytännöllisen ja jossa luova oivaltaminen kohtaa täsmällisen loogisuuden.

Eteneminen

Luvun avaa aihepiiriin johdatteleva ongelma tai esimerkki. Uusi teoreettinen tieto kootaan ja perustellaan, ja lisäesimerkit opastavat tiedon hyväksikäyttöön ja syventämiseen. Esimerkit on laadittu niin, että opiskelijat voivat omaksua ne itsenäisesti. Siten tuntityöskentelyssä voidaan usein jo aikaisessa vaiheessa siirtyä itsenäiseen harjoitteluun, jolloin opiskelijat etenevät omassa tahdissaan kirjan esimerkkejä hyödyntäen. Näin menetellen kaikki opiskelijat harjaantuvat perustaidoissa, ja samalla nopeammin etenevillä on mahdollisuus tietojen ja taitojen syventämiseen. Kun opiskelijat ohjataan käyttämään hyväkseen kirjan esimerkkejä ja teoriaosuuksia, tarve vihkomuistiinpanojen tekemiseen oppitunnilla vähenee ja opiskelijat voivat paremmin keskittyä opetukseen.

Harjoittelu

Lukujen harjoitukset ovat kahtena sarjana.

Sarja I sisältää perustehtäviä, jotka harjoittavat uusia menetelmiä, tukevat teoreettisen tiedon ymmärtämistä ja juurruttamista sekä ohjaavat opitun soveltamiseen. Enimmäkseen tehtävät heijastelevat luvun esimerkkien tilanteita. Sarjaa I voidaan käyttää esimerkiksi oppitunnin aikana tapahtuvaan harjoitteluun.

Sarja II sisältää perustehtävien lisäksi vaativampia tehtäviä, joissa usein on myös matematiikan harrastamiseen innostavaa syventävää tietoa. Sarjasta II voidaan valikoida oppitunnin mittaan havaittujen tarpeiden mukaiset helpommat ja vaativammat kotitehtävät.

Kirjan esimerkit ja teoriaosuudet ovat apuna myös kotitehtävien parissa työskenneltäessä. Kaikkia tarpeellisina pidettyjä tietoja tai sovellustilanteita ei siis tarvitse käsitellä oppitunnin aikana, vaan niihin voidaan perehtyä ratkaistaessa kotitehtäviä kirjan esimerkkien avulla.

Kertaaminen

Opiskelijat voivat kerrata koko kurssin kertausluvun avulla. Luvussa käydään ensin läpi kurssin koko sisältö esimerkeillä havainnollistettuna. Sen jälkeen on samojen otsikoiden mukaan järjestettyjä riittävän osaamisen takaavia perustehtäviä. Kertausluvun päättävissä tehtäväsarjoissa on vaativampia tehtäviä koko kurssin alueelta. Kertausluvun tehtävien vastauksissa on, kuten monien tehtävien vastauksissa kautta koko kurssin, ratkaisemista tukevia ohjeita.

Polynomi-funktiot

Kurssin keskeisen aihepiirin muodostavat polynomifunktiot sekä niihin liittyvät yhtälöt ja epäyhtälöt. Kurssilla perehdytään myös yleisemmin funktion käsitteeseen. Lisäksi tavoitteena on kehittää opiskelijan laskemisen, ongelmanratkaisun ja perustelemisen taitoja.

Toivotamme mielenkiintoisia ja tuloksellisia työskentelyhetkiä.

Helsingissä 1.6.2004

Tekijät

Ajankäyttöehdotus

Tässä ajankäyttöehdotuksessa kurssin opiskeluun käytetään 28 oppituntia.

Luku	Tuntimäärä
Reaaliluvut	2
Ensimmäisen asteen epäyhtälö	1
Funktio	2
Polynomilaskennan kertaus ja täydennys	4
Summan ja erotuksen tulo.	1
Summan neliö ja erotuksen neliö	2
Toisen asteen polynomifunktio ja toisen asteen yhtälö	2
Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava.	2
Sovelluksia	2
Toisen asteen epäyhtälö	2
Diskriminantti	2
Tulon nollasääntö	2
Korkeamman asteen yhtälöitä ja epäyhtälöitä	2
Nollakohtien ja tekijöiden yhteys	2

Sisällys

Reaaliluvut	7
Ensimmäisen asteen epäyhtälö	16
Funktio	22
Polynomilaskennan kertaus ja täydennys	32
Polynomi ja polynomifunktio	32
Vakiofunktio ja ensimmäisen asteen polynomifunktio ...	34
Polynomien summa ja erotus	37
Monomin ja polynomin tulo	41
Polynomien tulo	46
Summan ja erotuksen tulo	48
Summan neliö ja erotuksen neliö	54
Toisen asteen polynomifunktio ja toisen asteen yhtälö	60
Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava	69
Sovelluksia	76
Toisen asteen epäyhtälö	82
Diskriminantti	93
Tulon nollasääntö	99
Korkeamman asteen yhtälöitä ja epäyhtälöitä	105
Nollakohtien ja tekijöiden yhteys	111
Kompleksiluvut ja yhtälön kompleksijuuret	121
Korkeamman asteen yhtälöiden ratkaisukaavat	124
 Kertaus	 127
Kertaustehtäviä	138
Tehtäväsarjoja	142
Tehtävien vastaukset	145
Hakemisto	176

Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003 (ote)

Matematiikan pitkä oppimäärä

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tehtävänä on antaa opiskelijalle matemaattiset valmiudet, joita tarvitaan ammatillisissa opinnoissa ja korkeakouluopinnoissa. Pitkän matematiikan opinnoissa opiskelijalla on tilaisuus omaksua matemaattisia käsitteitä ja menetelmiä sekä oppia ymmärtämään matemaattisen tiedon luonnetta. Opetus pyrkii myös antamaan opiskelijalle selkeän käsityksen matematiikan merkityksestä yhteiskunnan kehityksessä sekä sen soveltamismahdollisuuksista arkielämässä, tieteessä ja tekniikassa.

Opetuksen tavoitteet

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tavoitteena on, että opiskelija

- tottuu pitkäjänteiseen työskentelyyn ja oppii sitä kautta luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa
- rohkaistuu kokeilemaan ja tutkimaan toimintaan, ratkaisujen keksimiseen sekä niiden kriittiseen arviointiin
- ymmärtää ja osaa käyttää matematiikan kieltä, kuten seuraamaan matemaattisen tiedon esittämistä, lukemaan matemaattista tekstiä, keskustelemaan matematiikasta, ja oppii arvostamaan esityksen täsmällisyyttä ja perustelujen selkeyttä
- oppii näkemään matemaattisen tiedon loogisena rakenteena
- kehittää lausekkeiden käsittely-, päättely- ja ongelmanratkaisutaitojaan
- harjaantuu käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, tottuu tekemään otaksumia, tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan perusteluja sekä arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä
- harjaantuu mallintamaan käytännön ongelmatilanteita ja hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita
- osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä.

Polynomifunktiot (MAA2)

Tavoitteet

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- harjaantuu käsittelemään polynomifunktioita
- oppii ratkaisemaan toisen asteen polynomiyhtälöitä ja tutkimaan ratkaisujen lukumäärää
- oppii ratkaisemaan korkeamman asteen polynomiyhtälöitä, jotka voidaan ratkaista ilman polynomien jakolaskua
- oppii ratkaisemaan yksinkertaisia polynomiepäyhtälöitä.

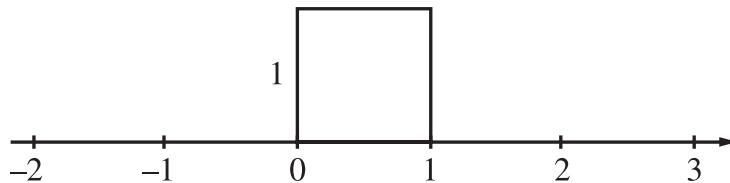
Keskeiset sisällöt

- polynomien tulo ja binomikaavat
- polynomifunktio
- toisen ja korkeamman asteen polynomiyhtälöitä
- toisen asteen yhtälön juurten lukumäärän tutkiminen
- toisen asteen polynomin jakaminen tekijöihin
- polynomiepäyhtälön ratkaiseminen

Reaaliluvut

Ongelma

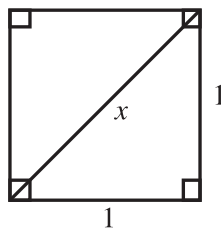
Käytä hyväksi lukusuoralle piirrettyä neliötä ja merkitse luku $\sqrt{2}$ likiarvoa laskematta oikealle paikalleen lukusuoralle. Käytä harppia.



Pitkään uskottiin, että kaikki luvut ovat rationaalilukuja eli jokainen luku voidaan kirjoittaa murtolukumuodossa $\frac{m}{n}$, missä m ja n ovat kokonaislukuja. Sitten kreikkalaiset matemaatikot, jotka tunsivat Pythagoraan lauseen, ryhtyivät pohtimaan, kuinka pitkä on neliön lävistäjä, jos neliön sivun pituus on 1.

$$x^2 = 1^2 + 1^2$$

$$x^2 = 2$$



Kreikkalaiset todistivat, että yhtälöä $x^2 = 2$ ei toteuta mikään rationaaliluku. Siis luku $\sqrt{2}$ ei ole rationaaliluku.* On siis olemassa muitakin lukuja kuin rationaalilukuja.

* Todistus opitaan syventävässä kurssissa Logiikka ja lukuteoria. Yleisemmin voidaan todistaa, että jos kokonaisluvun neliöjuuri ei ole kokonaisluku, niin neliöjuuri ei ole rationaaliluku. Siten esimerkiksi luvut $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ jne. eivät ole rationaalilukuja.

Määritelmä

Luku, jota ei voida kirjoittaa murtolukumuodossa $\frac{m}{n}$, on *irrationaaliluku*.

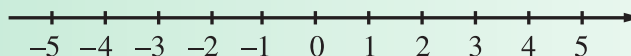
Irrationaaliluvun desimaalimuoto on päättymätön ja jaksoton.

Irrationaalilukuja ovat esimerkiksi luvut $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $1 - \sqrt{3}$ ja π (ympyrän kehän pituuden suhde ympyrän halkaisijan pituuteen).

Määritelmä

Rationaaliluvut ja irrationaaliluvut muodostavat yhdessä *reaalilukujen* joukon $\mathbb{R}$.

Reaalilukujen joukkoa voidaan geometrisesti havainnollistaa lukusuorana.

**ESIMERKKI 1**

Onko luku $0,101001000\dots$ (nolla pilkku kymmenen sata tuhat ...) rationaali- vai irrationaaliluku?

Ratkaisu

Luku $0,101001000\dots$ on päättymätön ja jaksoton, joten luku on irrationaaliluku.

Vastaus

irrationaaliluku

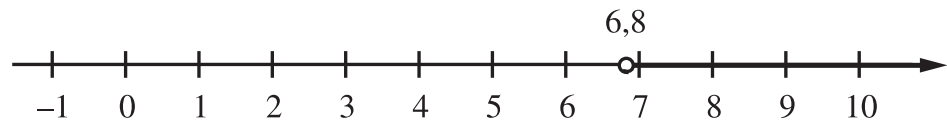
JOHDANTOESIMERKKI 2

Kirjoita epäyhtälönä ja havainnollista lukusuoralla.

- Hypyn pituus s metriä on yli 6,8 metriä.
- Äänen voimakkuus m desibeliä on korkeintaan 6 desibeliä.
- Reaaliluku x on suurempi tai yhtä suuri kuin luku -2 mutta pienempi kuin luku 4.

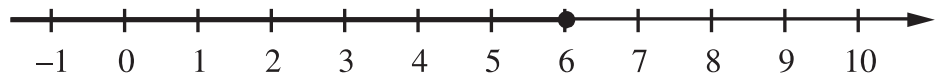
Ratkaisu

- Hypyn pituus s metriä on suurempi kuin 6,8 metriä.
Merkitään $s > 6,8$.



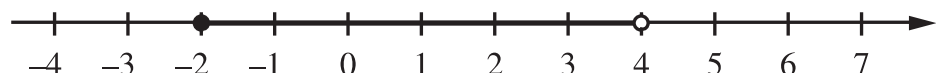
Epäyhtälön toteuttavat kaikki luvun 6,8 oikealla puolella lukusuoralla olevat reaaliluvut. Niitä on ääretön määrä. Ylärajaa ei ole. Näiden lukujen joukkoa voi havainnollistaa paksummalla viivalla. Luku 6,8 ei toteuta epäyhtälöä, joten sen kohdalle merkitään lukusuoralle avoin renas.

- Äänen voimakkuuden lukuarvo m on pienempi kuin 6 tai yhtä suuri kuin 6. Merkitään $m \leq 6$.



Luku 6 toteuttaa epäyhtälön, joten sen kohdalle merkitään umpinainen ympyrä.

- Ehdon toteuttavat luku -2 sekä kaikki -2 :n ja 4 :n välissä olevat reaaliluvut.



Ehto merkitään *kaksoisepäyhtälönä* $-2 \leq x < 4$.

Vastaus

- $s > 6,8$
- $m \leq 6$
- $-2 \leq x < 4$

Reaalilukujen suuruusjärjestys ilmaistaan epäyhtälömerkkien avulla.

Epäyhtälömerkit

$<$ ”pienempi kuin”

$>$ ”suurempi kuin”

$\leq$ ”pienempi tai yhtä suuri kuin”

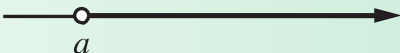
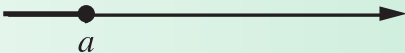
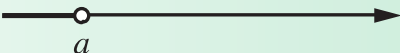
$\geq$ ”suurempi tai yhtä suuri kuin”

Lukusuoran yhtenäiset osat eli *välit* voidaan kuvata käyttämällä lukuun viittaavaa kirjainta ja epäyhtälömerkkejä, kuten tehtiin johdanto-esimerkissä 2. Voidaan myös käyttää erityisiä välien merkintöjä. Merkinnät on esitelty seuraavassa taulukossa. Välin merkinnässä ilmaistaan hakasulkeen suunnalla, onko päätepiste mukana välissä vai ei.

Lukusuoran välit

Välin kuvaus ja havainnollistus	Kuvaus epäyhtälöllä tai kaksois-epäyhtälöllä	Merkintä välin merkinnällä
Niiden reaalilukujen joukko, jotka ovat	Välillä ovat ne reaaliluvut x , joille pätee	
• suurempia tai yhtä suuria kuin a ja pienempiä tai yhtä suuria kuin b 	$a \leq x \leq b$	$[a, b]$
• suurempia kuin a ja pienempiä kuin b 	$a < x < b$	$]a, b[$
• suurempia kuin a ja pienempiä tai yhtä suuria kuin b 	$a < x \leq b$	$]a, b]$
• suurempia tai yhtä suuria kuin a ja pienempiä kuin b. 	$a \leq x < b$	$[a, b[$

Merkinnöissä käytetty symboli ∞ on rajattomuuden (äärettömyyden) symboli.

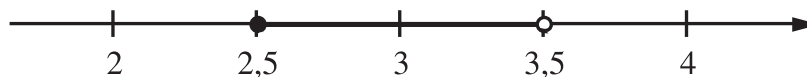
Välin kuvaus ja havainnollistus	Kuvaus epäyhtälöllä tai kaksoisepäyhtälöllä	Merkintä välin merkinnällä
Niiden reaalilukujen joukko, jotka ovat	Välillä ovat ne reaaliluvut x , joille pätee	
• suurempia tai yhtä suuria kuin a 	$x \geq a$	$[a, \infty[$
• suurempia kuin a. 	$x > a$	$]a, \infty[$
• pienempiä tai yhtä suuria kuin a 	$x \leq a$	$] -\infty, a]$
• pienempiä kuin a. 	$x < a$	$] -\infty, a[$

ESIMERKKI 3

Millä välillä on luku, jonka likiarvo ykkösten tarkkuudella on 3?

Ratkaisu

Pyöristyssääntöjen mukaan luku 2,5 pyöristetään luvuksi 3 ja luku 3,5 luvuksi 4. Reaaliluku, joka pyöristyy luvuksi 3, on suurempi tai yhtä suuri kuin 2,5 ja pienempi kuin 3,5.



Väli voidaan ilmaista kaksoisepäyhtälöllä $2,5 \leq x < 3,5$ tai välin merkinnällä $[2,5; 3,5[$.

Vastaus

välillä $2,5 \leq x < 3,5$ eli välillä $[2,5; 3,5[$

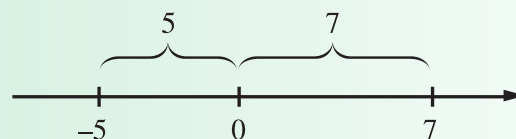
Määritelmä

Reaaliluvun etäisyys nolasta on luvun *itseisarvo*.

Luvun a itseisarvo merkitään $|a|$.

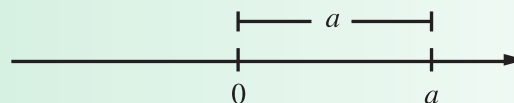
Esimerkiksi luvun 7 itseisarvo on luku 7 itse eli $|7| = 7$.

Luvun $|-5|$ itseisarvo on luvun -5 vastaluku 5 eli $|-5| = 5$.

**Itseisarvon määrittäminen**

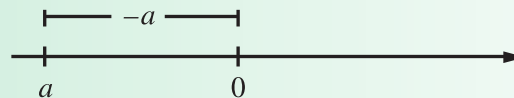
Jos luku a on epänegatiivinen, luvun a itseisarvo on luku a itse.

Jos $a \geq 0$, niin $|a| = a$.



Jos luku a on negatiivinen, luvun a itseisarvo on luvun vastaluku $-a$.

Jos $a < 0$, niin $|a| = -a$.

**ESIMERKKI 4**

Määritä $|2 - \sqrt{5}|$.

Ratkaisu

Selvitetään, onko luku $2 - \sqrt{5}$ positiivinen vai negatiivinen:

$$2 - \sqrt{5} \approx -0,24.$$

Koska luku $2 - \sqrt{5}$ on negatiivinen, luvun $2 - \sqrt{5}$ itseisarvo on luvun vastaluku:

$$|2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5}) = -2 + \sqrt{5}$$

Vastaus

$$-2 + \sqrt{5}$$

Määritelmä

Niiden reaalilukujen joukkoa, jotka toteuttavat yhtälön (epäyhtälön), kutsutaan yhtälön (epäyhtälön) *ratkaisujoukoksi*.

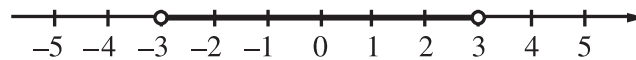
ESIMERKKI 5

Ratkaise epäyhtälö a) $|x| < 3$ b) $|x| > 3$.

Ilmaise epäyhtälön ratkaisujoukko myös välin merkinnällä, jos mahdollista.

Ratkaisu

a) Epäyhtälön $|x| < 3$ toteuttavat luvut, joiden etäisyys nolasta on pienempi kuin 3. Luvut ovat lukusuoralla lukujen -3 ja 3 välissä.



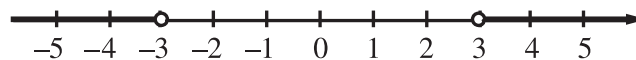
Ratkaisujoukko voidaan kuvata kaksoisepäyhtälöllä:

$$-3 < x < 3.$$

Ratkaisujoukko voidaan merkitä myös välin merkinnällä:

Ratkaisujoukko on väli $] -3, 3[$.

b) Epäyhtälön $|x| > 3$ toteuttavat luvut, joiden etäisyys nolasta on suurempi kuin 3. Luvun etäisyys nolasta on suurempi kuin 3, kun luku on pienempi kuin -3 tai suurempi kuin 3 .



Siis luku x toteuttaa epäyhtälön, kun

$$x < -3 \text{ tai } x > 3.$$

Ratkaisujoukko ei ole väli, joten sitä ei voida kuvailla välin merkinnällä.

Vastaus

a) $-3 < x < 3$, ratkaisujoukko on väli $] -3, 3[$.

b) $x < -3$ tai $x > 3$, ratkaisujoukko ei ole väli.

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

- Onko luku rationaali- vai irrationaaliluku?
a) $-6,693$
b) $\sqrt{7}$
c) $5,3939\dots$ (jakso 39)
d) $0,101010010010001000\dots$ (nolla pilkku kymmenen kymmenen sata sata tuhat tuhat ...)
- Merkitse epäyhtälönä
a) juoksuaika b sekuntia on vähintään 9,8 sekuntia
b) ajoneuvon massa c tonnia on yli 12 tonnia mutta kuitenkin korkeintaan 15 tonnia
c) luku x on positiivinen
d) luku x ei ole positiivinen.
- Merkitse välin merkinnällä niiden reaalilukujen x joukko, joille pätee
a) $-1 \leq x < 3$ b) $8 < x < 9$
c) $x \leq 1$ d) $x < -2$.
- Merkitse välin merkinnällä
a) negatiivisten reaalilukujen joukko
b) epänegatiivisten reaalilukujen joukko.
- Mitkä seuraavista luvuista ovat välillä $[-\sqrt{3}, 5[$?
 $-\sqrt{3}$ 5 4,99999 $5 - \sqrt{3}$ $-1,7321$
- Mikä on a) pienin b) suurin luku, jonka likiarvo ykkösten tarkkuudella on 6?
c) Ilmaise välin merkinnällä niiden lukujen joukko, joiden likiarvo ykkösten tarkkuudella on 6.
- Mikä on luvun vastaluku?
a) $\sqrt{5}$ b) $-\pi$
c) $-3 - \sqrt{7}$ d) $2 - \sqrt{5}$

8. Määritä.

- a) $|\sqrt{3}|$ b) $|-6|$
c) $|2 - \sqrt{3}|$ d) $|1 - \sqrt{3}|$

9. Ratkaise epäyhtälö

- a) $|x| < 6$ b) $|x| > 6$.

Ilmaise epäyhtälön ratkaisujoukko myös välin merkinnällä, jos mahdollista.

10. Kuvaile epäyhtälöillä ja, jos mahdollista, myös välin merkinnällä niiden lukujen joukko, joiden etäisyys luvusta 3 on

- a) pienempi kuin 5
b) pienempi tai yhtä suuri kuin 5
c) suurempi kuin 5
d) suurempi tai yhtä suuri kuin 5.

SARJA II.

PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

11. Anna desimaalimuodon avulla esimerkki irrationaaliluvusta.

12. Suunnittelija oli lujuuslaskelmissaan päätenyt tulokseen, että sillan kantavuus on

$100(198 - 140\sqrt{2})$ tonnia.

- a) Hän käytti likiarvoa $\sqrt{2} \approx 1,4$, laski sillan kantavuuden ja totesi, että painorajoituksiin ei ollut aiheutta. Kuinka suureksi hän laski sillan kantavuuden?
b) Toinen insinööri tarkisti edellisen laskelmat ja havaitsi ne oikeiksi. Hän päätti kuitenkin olla huolellisempi, käytti likiarvoa $\sqrt{2} \approx 1,41$ ja päätyi ehdottamaan painorajoitusta. Kuinka suureksi hän laski sillan kantavuuden?
c) Painorajoituksesta huolimatta silta romahti pian käyttöönoton jälkeen yhden ainoan pakettiauton painosta. Kuinka se oli mahdollista?

13. Merkitse epäyhtälöllä ja käyttämällä välin merkintää niiden reaalilukujen joukko, jotka ovat

- a) suurempia kuin -3 ja pienempiä kuin 5
 - b) suurempia tai yhtä suuria kuin -3 ja pienempiä tai yhtä suuria kuin $4,9$
 - c) pienempiä kuin $4,91$.
- Ilmoita edelleen jokin luku, joka
- d) on a-kohdan välillä, mutta ei ole b-kohdan välillä
 - e) on b-kohdan välillä, mutta ei ole a-kohdan välillä
 - f) on a-kohdan ja c-kohdan väleillä, mutta ei ole b-kohdan välillä.

14. Mitkä seuraavista luvuista ovat välillä $[-4,5; -\pi[$?

$$-4,5 \quad -4,501 \quad -4,49999 \quad -3,14 \quad -\frac{355}{113} \quad -\pi$$

15. Onko välillä olevien lukujen joukossa suurin luku tai pienin luku eli sellainen luku, joka on välin kaikkia muita lukuja suurempi tai pienempi? Mikä tämä suurin tai pienin luku on?

- a) $[1, 5]$
- b) $]1, 5]$
- c) $]-\infty, 5[$

16. Millä välillä ovat luvut, joiden

- a) yksidesimaalinen likiarvo on $0,7$
- b) kaksidesimaalinen likiarvo on $3,00$?

17. Määritä luvun itseisarvo.

- a) $\sqrt{3} - 1$
- b) $\sqrt{3} - 2$
- c) $-3 + \sqrt{10}$
- d) $-3 + \sqrt{5}$

18. Ratkaise epäyhtälö. Ilmaise epäyhtälön ratkaisujoukko myös välin merkinnällä, jos mahdollista.

- a) $|x| \leq \sqrt{5}$
- b) $|x| \geq \sqrt{5}$

19. Kuvaile epäyhtälöillä ja, jos mahdollista, välin merkinnällä niiden reaalilukujen joukko

- a) joiden etäisyys luvusta -2 on pienempi tai yhtä suuri kuin 5
- b) joiden etäisyys luvusta -3 on suurempi kuin 7
- c) joiden etäisyys luvusta -3 on suurempi kuin 7 tai jotka ovat positiivisia
- d) joiden etäisyys luvusta -3 on suurempi kuin 7 ja jotka ovat positiivisia.

20. Osoita, että luvut ovat toistensa käänteislukuja.

- a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ja $\sqrt{5}$
- b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ja $\frac{\sqrt{6}}{2}$
- c) $\frac{\sqrt{10}}{6}$ ja $\frac{3\sqrt{10}}{5}$

21. Määritä jokin reaaliluku, joka on

- a) lukujen 1 ja $\sqrt{1 + 10^{-20}}$ välissä
- b) lukujen $\sqrt{1 + 10^{-20}}$ ja $\sqrt{1 + 10^{-21}}$ välissä.

22. Seuraavissa potenssilausekkeissa a on reaaliluku ja n positiivinen kokonaisluku. Millä ehdolla

- a) a^n on negatiivinen
- b) a^n on positiivinen
- c) $-a^n > 0$
- d) $(-a)^n > 0$
- e) $(-a)^n < 0$
- f) $-a^n < 0$?

Ensimmäisen asteen epäyhtälö

Ongelma

Luvut -6 ja 12 toteuttavat epäyhtälön $-6 < 12$. Mikä epäyhtälö saadaan, kun tämän epäyhtälön

- a) molemmille puolille lisätään luku 5
- b) molemmilta puolilta vähennetään luku -1
- c) molemmat puolet kerrotaan luvulla 5
- d) molemmat puolet jaetaan luvulla -2 ?

Ensimmäisen asteen epäyhtälön ratkaiseminen perustuu seuraaviin reaalitylukujen ominaisuuksiin, jotka havainnollistuivat yllä olevassa ongelmassa.

Reaalitylukujen ominaisuus	Ominaisuuden seuraus
Jos kahteen reaalitylukuun lisätään sama luku tai niistä vähennetään sama luku, niin suuruusjärjestys pysyy samana (epäyhtälömerkin suunta säilyy).	Epäyhtälö säilyy yhtäpitävänä, jos molemmille puolille lisätään tai molemmilta puolilta vähennetään sama termi.
Jos kaksi reaalitylukua kerrotaan tai jaetaan samalla positiivisella luvulla, niin suuruusjärjestys pysyy samana (epäyhtälömerkin suunta säilyy).	Epäyhtälö säilyy yhtäpitävänä, jos molemmat puolet kerrotaan tai jaetaan samalla positiivisella luvulla.
Jos kaksi reaalitylukua kerrotaan tai jaetaan samalla negatiivisella luvulla, niin suuruusjärjestys vaihtuu (epäyhtälömerkin suunta kääntyy).	Epäyhtälö säilyy yhtäpitävänä, jos molemmat puolet kerrotaan tai jaetaan samalla negatiivisella luvulla ja jos <i>samalla vaihdetaan epäyhtälömerkin suunta</i> .

Siis ensimmäisen asteen epäyhtälö voidaan ratkaista samoilla menetelmillä kuin ensimmäisen asteen yhtälö, kunhan yhtälöä jaettaessa (kerrotaessa) otetaan huomioon jakajan (kertojan) merkki.

Ensimmäisen asteen epäyhtälön ratkaiseminen

Epäyhtälön toiselta puolelta poistetaan vakiotermit ja toiselta puolelta muuttujan sisältävät termit termejä lisäämällä tai vähentämällä. Termejä lisättäessä ja vähennettäessä epäyhtälön suunta säilyy. Lopuksi jaetaan muuttujan kertoimella tai kerrotaan kertoimen käänteisluvulla.

Tällöin

- jos jakaja (kertoja) on positiivinen, epäyhtälön suunta säilyy
- jos jakaja (kertoja) on negatiivinen, epäyhtälön suunta vaihtuu.

ESIMERKKI 1

Ratkaise epäyhtälö. Piirrä ratkaisujoukko lukusuoralle.

a) $x - 5 > 3x$

b) $9x - 8 \geq 3(x - 6)$

Ratkaisu

a) $x - 5 > 3x$ | +5

$x > 3x + 5$ | -3x

$x - 3x > 5$

$-2x > 5$ | : (-2) < 0 Epäyhtälö jaetaan negatiivisella luvulla, joten suunta vaihtuu.

$x < -\frac{5}{2}$

Välivaiheet, joissa molemmille puolille lisätään tai molemmilta puolilta vähennetään sama termi, voidaan lyhentää termien siirtämiseksi kuten ratkaistaessa ensimmäisen asteen yhtälöitä.

$x - 5 > 3x$

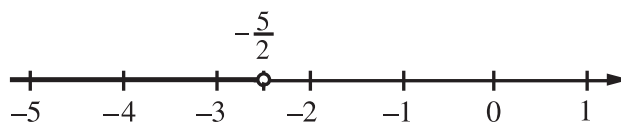
Termi -5 siirretään vasemmalta oikealle ja termi $3x$ oikealta vasemmalla ja vaihdetaan termien merkit.

$x - 3x > 5$

$-2x > 5$ | : (-2) < 0 Epäyhtälö jaetaan negatiivisella luvulla, joten suunta vaihtuu.

$x < -\frac{5}{2}$

Epäyhtälön $x - 5 > 3x$ ratkaisujoukko on lukusuoran väli $]-\infty, -\frac{5}{2}[$.^{*}



b) $9x - 8 \geq 3(x - 6)$

$$9x - 8 \geq 3x - 18$$

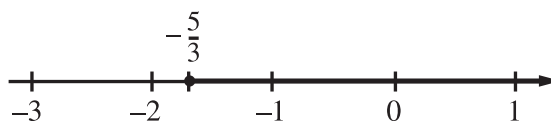
$$9x - 3x \geq -18 + 8$$

$$6x \geq -10 \quad | : 6 > 0 \quad \text{Epäyhtälö jaetaan positiivisella luvulla, joten suunta säilyy.}$$

$$x \geq -\frac{10}{6}$$

$$x \geq -\frac{5}{3}$$

Epäyhtälön $9x - 8 \geq 3(x - 6)$ ratkaisujoukko on lukusuoran väli $[-\frac{5}{3}, \infty[$.



Vastaus

a) $x < -\frac{5}{2}$ b) $x \geq -\frac{5}{3}$

* Epäyhtälön ratkaisun voi tarkistaa graafisella laskimella piirtämällä molempien puolien kuvaajat $y_1 = x - 5$ ja $y_2 = 3x$ samaan graafisen laskimen näyttöön. Epäyhtälön $x - 5 > 3x$ ratkaisujoukko on se lukusuoran osa, jonka kohdalla kuvaaja $y_1 = x - 5$ on kuvaajan $y_2 = 3x$ yläpuolella.

ESIMERKKI 2

Ratkaise epäyhtälö $x\sqrt{5} - 1 \geq 3x$.*

Ratkaisu

$$x\sqrt{5} - 1 \geq 3x$$

Vasemmalla puolella muuttujan x kerroin on $\sqrt{5}$.

$$x\sqrt{5} - 3x \geq 1$$

Muuttujan x kertoimet yhdistetään käyttämällä osittelulakia $ac + bc = (a + b)c$.

$$(\sqrt{5} - 3)x \geq 1$$

$$| : (\sqrt{5} - 3) \approx -0,76 < 0$$

Epäyhtälön suunta vaihtuu.

$$x \leq \frac{1}{\sqrt{5} - 3}$$

Vastaus

$$x \leq \frac{1}{\sqrt{5} - 3}$$

* Luvun ja kirjaimen tulo on tapana merkitä niin, että luku on ennen kirjainta (esimerkiksi $3x$). Neliöjuuren ja kirjaimen tulo merkitään joskus toisin päin (esimerkiksi $x\sqrt{5}$), jotta neliöjuurimerkin vaikutusalue tulisi selvemmäksi (merkintä $\sqrt{5}x$ saattaa sekaantua merkintään $\sqrt{5x}$).

TEHTÄVIÄ

SARJA I.

PERUSTEHTÄVIÄ

23. Ratkaise epäyhtälö. Ilmaise ratkaisujoukko myös välin merkinnällä ja piirrä väli lukusuoralle.

a) $7x + 5 < 3x + 1$

b) $4x + 7 \geq 5x - 1$

24. Ratkaise.

a) $4(2 - x) \leq 2x - 1$

b) $3(x + 1) + 1 < 5(x + 2)$

25. Puhelinlaitokset A ja B hinnoittelevat paikallisverkon lankapuhelut seuraavasti:

A: 0,16 euroa/puhelu ja 0,044 euroa/minuutti

B: 0,06 euroa/minuutti

Kuinka pitkille puheluille laitoksen A hinnoitteluperuste on edullisempi?

26. Mille reaaliluvuille x pätee

a) $3x > 5x$ b) $\frac{x}{3} > \frac{x}{5}$?

27. Ratkaise.

a) $3(x - 1) < 2(1 + x) + x$

b) $x + 5(x + 3) < 6x + 8$

28. Millä muuttujan s arvoilla lausekkeen $-30 - 2s$ arvo on positiivinen? Ilmaise ratkaisujoukko myös välin merkinnällä.

29. Ratkaise.

a) $x - \frac{3}{5} \geq \frac{x}{5}$ b) $\frac{x}{2} + \frac{3}{4} < \frac{x}{6}$

30. Millä vakion k arvolla epäyhtälön $4(x - k) < 8(x + k)$ ratkaisujoukko on väli $]-2, \infty[$?

31. Ratkaise.

a) $3x + 1 < x\sqrt{7}$ b) $x\sqrt{3} - 1 \geq 2x$

32. Osoita, että jokainen negatiivinen reaaliluku toteuttaa epäyhtälön $5x - 7 > 6(x - 2)$.

33. Mitkä luonnolliset luvut toteuttavat epäyhtälön $3x + 57 \geq 14x$?

34. Millä muuttujan t arvoilla on

$0 < 5t - 12 < 8$?

35. Millä muuttujan s arvoilla molempien lausekkeiden $5s + 4$ ja $-5s + 4$ arvot ovat positiiviset?

SARJA II.

PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

36. Ratkaise epäyhtälö. Ilmaise ratkaisujoukko myös välin merkinnällä.

a) $5x > x$

b) $x > 9x$

c) $x > 9x + 1000$

37. Ratkaise.

a) $x + 5 \leq 5x$

b) $3(2 - x) \geq 3(x + 4) + 5$

38. Ratkaise.

a) $3(1 + x) < 4(1 + x) - 1$

b) $6(x - 1) \leq 2(5x - 3) - 4x$

39. Millä muuttujan t positiivisilla arvoilla lausekkeen $-18 + 6t$ arvo on negatiivinen?

40. Autovuokraamoilla A ja B on seuraavat vuokrausehdot:

A: 30 euroa vuorokausi ja 30 senttiä kilometri

B: 40 euroa vuorokausi ja 25 senttiä kilometri

a) Auto vuokrataan vuorokaudeksi. Millä kilometrimäärillä vuokraamo B on edullisempi?

b) Lomamatkalla on tarkoitus ajaa 5 000 kilometriä. Missä ajassa matka on ajettava, jotta vuokraamo B olisi edullisempi?

41. Ratkaise epäyhtälö.

a) $\frac{2}{3}(x-2) > \frac{4}{5}x - 1$

b) $\frac{3x-4}{2} < \frac{5x-7}{3}$

42. Mikä on suurin kokonaisluku n , jolle pätee

$$\frac{n}{7} \geq \frac{n}{6} + \frac{1}{5}?$$

43. Ratkaise epäyhtälö ja määritä suurin kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön.

a) $\pi x - 2x < 6$

b) $\pi x - \sqrt{10}x > 6$

44. Millä vakion b arvoilla yhtälön

$$3(x+b) - 6 = x - b$$

juuri on suurempi kuin -5 ?

45. Millä vakion a arvoilla epäyhtälön

$$3(x+a) > x - 5a$$

ratkaisuväli sisältää välin $[1, \infty[$?

46. Osoita, että jos reaalityttö toteuttaa epäyhtälön

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \geq x,$$

niin se toteuttaa myös epäyhtälön

$$x - \frac{2}{3} < \frac{x}{6}.$$

47. Millä vakion a arvoilla epäyhtälö

$$4x + a < 4(x+a) + 1$$

a) toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla

b) ei toteudu millään muuttujan x arvoilla?

Funktio

Ongelma

Mitä funktioita käsiteltiin kurssissa Funktiot ja yhtälöt? Tiedätkö muita funktioita? Yritä määritellä, mitä tarkoittaa käsite funktio.

JOHDANTOESIMERKKI 1

Funktion g arvot lasketaan seuraavalla säännöllä:

Luku kerrotaan kahdella, tuloon lisätään luku 6 ja lopuksi lasketaan tämän summan neliöjuuri.

- Laske funktion g arvot $g(5)$, $g(1)$ ja $g(-4)$.
- Muodosta funktion g lauseke. Käytä lauseketta ja laske funktion g arvo kohdassa 29.
- Mikä on funktion g määrittelyjoukko?
- Piirrä funktion g kuvaaja.

Ratkaisu

- Merkintä $g(5)$ tarkoittaa lukua, joka saadaan tulokseksi, kun funktion g sääntöä sovelletaan lukuun 5.

Luku 5 kerrotaan kahdella: $2 \cdot 5$
 Tuloon lisätään luku 6: $2 \cdot 5 + 6$
 Lasketaan summan neliöjuuri: $\sqrt{2 \cdot 5 + 6}$

$$\text{Siis } g(5) = \sqrt{2 \cdot 5 + 6} = \sqrt{16} = 4.$$

Vastaavasti:

$$g(1) = \sqrt{2 \cdot 1 + 6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$g(-4) = \sqrt{2 \cdot (-4) + 6} = \sqrt{-2} \quad \text{Ei määritelty.}$$

Koska luvun -2 neliöjuurta ei ole määritelty, funktion g arvoa $g(-4)$ ei ole määritelty.

b) Kuvataan funktion sääntö käyttämällä kirjainta, esimerkiksi kirjainta x .

$$\begin{array}{ll} \text{Luku } x \text{ kerrotaan kahdella:} & 2x \\ \text{Tuloon lisätään luku } 6: & 2x + 6 \\ \text{Lasketaan summan neliöjuuri:} & \sqrt{2x + 6} \end{array}$$

$$\text{Siis } g(x) = \sqrt{2x + 6}.$$

Funktiolle g saatiin lauseke, jossa muuttujana on x .

Funktion $g(x) = \sqrt{2x + 6}$ arvo kohdassa 29 lasketaan sijoittamalla funktion lausekkeeseen muuttujan paikalle luku 29.

$$g(29) = \sqrt{2 \cdot 29 + 6} = \sqrt{64} = 8$$

c) Luvun neliöjuuri on määritelty, kun luku on epänegatiivinen. Siis funktio $g(x) = \sqrt{2x + 6}$ on määritelty, kun $2x + 6 \geq 0$. Ratkaistaan epäyhtälö.

$$2x + 6 \geq 0$$

$$2x \geq -6 \quad | : 2 > 0$$

$$x \geq -3$$

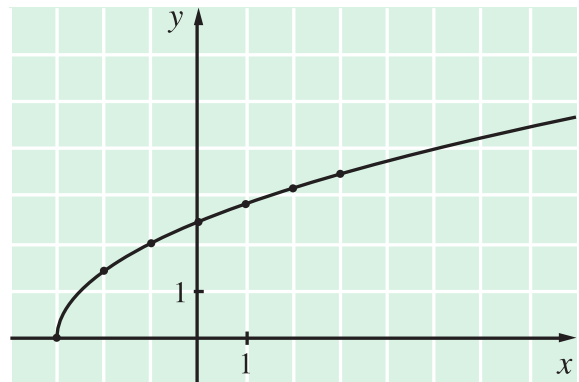
Funktio g on määritelty niillä muuttujan x arvoilla, jotka toteuttavat epäyhtälön $x \geq -3$. Funktion g määrittelyjoukko on väli $[-3, \infty[$.

d) Funktion kuvaaja muodostuu niistä koordinaatiston pisteistä, joiden koordinaatti vaaka-akselilla on muuttujan arvo ja koordinaatti pystyakselilla vastaava funktion arvo.

Kuvaajan hahmottelemiseksi lasketaan funktion arvoja.

x	$g(x) = \sqrt{2x+6}$
-3	$\sqrt{2 \cdot (-3) + 6} = 0$
-2	$\sqrt{2 \cdot (-2) + 6} = \sqrt{2} \approx 1,41$
-1	2
0	$\sqrt{6} \approx 2,45$
1	$\sqrt{8} \approx 2,83$
2	$\sqrt{10} \approx 3,16$
3	$\sqrt{12} \approx 3,46$

Merkitään koordinaatistoon kuvaajan pisteet $(-3, 0)$, $(-2, 1,41)$, $(-1, 2)$ jne. ja hahmotellaan pisteiden kautta kulkeva käyrä. Apuna voidaan käyttää graafisella laskimella piirrettyä kuvaajaa $y = \sqrt{2x+6}$.



Vastaus

- a) $g(5) = 4$, $g(1) = 2\sqrt{2}$, $g(-4)$ ei ole määritelty
- b) $g(x) = \sqrt{2x+6}$, $g(29) = 8$
- c) $[-3, \infty[$

Funktion määritelmä

Funktio on sääntö, joka ilmaisee, kuinka jokaisesta funktion määrittelyjoukon luvusta saadaan toinen luku, *funktion arvo*. Säännön tulee olla sellainen, että se määrää funktion arvon yksikäsitteisesti.

Jos f on funktio ja a jokin funktion f määrittelyjoukon luku, niin säännön mukaan laskettua funktion f arvoa merkitään $f(a)$. Luku $f(a)$ on *funktion f arvo kohdassa (pisteessä) a* .

Funktion lauseke

Funktio voidaan usein kuvata laskulausekkeella, joka määrittelyjoukon lukuihin viittaavan kirjaimen eli *muuttujan* avulla kertoo, kuinka funktion arvot lasketaan.

Johdantoesimerkin 1 funktio g kuvailtiin ensin sanallisesti, mutta funktiolle löydettiin myös lauseke, $g(x) = \sqrt{2x + 6}$.

Kun funktiolla on laskulauseke, funktion arvot voidaan laskea sijoittamalla muuttujan arvot funktion lausekkeeseen.

Funktion $f(x) = x^2 - x$ arvo kohdassa 5 (eli *arvo muuttujan arvolla 5*) on $f(5) = 5^2 - 5 = 20$.

Kaikilla funktioilla ei kuitenkaan ole sellaista laskulauseketta, johon sijoittamalla arvot voidaan mekaanisesti laskea. Tällainen funktio on tehtävässä 56.

Funktion määrittelyjoukko

Jos funktio kuvataan suoraan laskusäännöllä, niin funktion *määrittelyjoukko* on suurin mahdollinen joukko, jossa funktion arvo voidaan laskea.

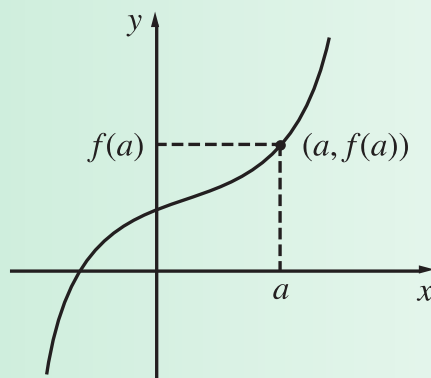
Funktion $f(x) = x^2 - x$ arvo voidaan laskea kaikilla muuttujan x reaaliarvoilla. Funktion f määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

Esimerkin 1 funktion $g(x) = \sqrt{2x + 6}$ määrittelyjoukoksi havaittiin väli $[-3, \infty[$.

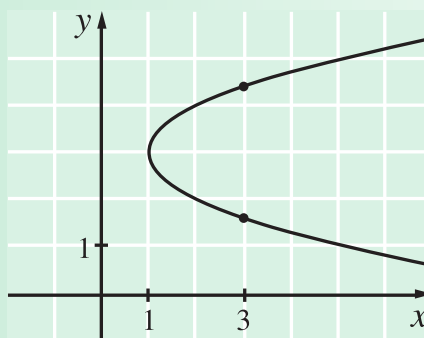
Sovellustilanteet saattavat rajata mahdollisia muuttujan arvoja (tehtävät 55 ja 64). Määrittelyjoukon rajaaminen voi myös sisältyä funktion kuvailuun (tehtävä 56).

Funktion kuvaaja

Funktion kuvaaja on koordinaatiston käyrä, joka muodostuu niistä koordinaatiston pisteistä, joiden koordinaatti vaaka-akselilla on muuttujan arvo ja koordinaatti pystyakselilla funktion arvo.



Kuviossa on xy -koordinaatistossa erään funktion f kuvaaja. Kuvaaja muodostuu pisteistä $(a, f(a))$. Koska funktion arvo on yksikäsitteinen, jokaisen määrittelyjoukkoon kuuluvan muuttujan arvon kohdalla on yksi kuvaajan piste.



Kuvion käyrä ei ole minkään funktion kuvaaja, sillä esimerkiksi muuttujan arvon 3 kohdalla on kaksi käyrän pistettä.

ESIMERKKI 2

Mikä on funktion $g(x) = \frac{3x}{2x+6}$ määrittelyjoukko?

Ratkaisu

Koska nolllalla ei voi jakaa, funktio g ei ole määritelty sellaisissa kohdissa, joissa nimittäjän $2x+6$ arvo on nolla. Kaikissa muissa kohdissa funktion arvo voidaan laskea.

Ratkaistaan kohdat, joissa nimittäjän $2x + 6$ arvo on 0.

$$2x + 6 = 0$$

$$2x = -6 \quad | : 2$$

$$x = -3$$

Määrittelyjoukko on reaalilukujen joukko, josta on poistettu luku -3 . Joukkoa merkitään* $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Määrittelyjoukko ei ole väli, joten sitä ei voida merkitä välin merkinnällä.

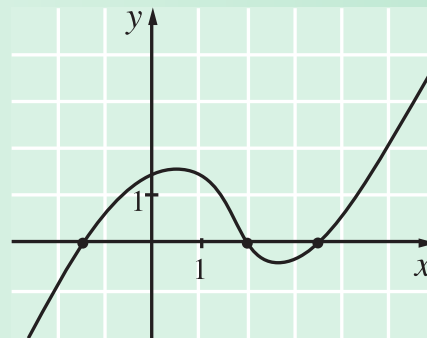
Määrittelyjoukko voidaan myös kuvata ilmoittamalla funktion *määrittelyehto*: $x \neq -3$.

Vastaus

$\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ (määrittelyehto $x \neq -3$)

Funktion nollakohta

Funktion *nollakohtia* ovat ne muuttujan arvot, joilla funktio saa arvon nolla.



Koska funktion arvot ovat kuvaajan pisteiden y -koordinaatteja, niin funktion $f(x)$ nollakohdat ovat kuvaajan ja x -akselin leikkauspisteiden x -koordinaatit.

Nollakohdat määritetään täsmällisesti ratkaisemalla yhtälö

$$f(x) = 0.$$

* Äärellinen lukujoukko voidaan kuvata luettelemalla joukkoon kuuluvat luvut aaltosulkeissa. Esimerkiksi $\{-2, 1, 3\}$ tarkoittaa joukkoa, johon kuuluvat luvut -2 , 1 ja 3 . Merkintä $\{-3\}$ tarkoittaa siis joukkoa, johon kuuluu vain luku -3 , ja merkintä $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ reaalilukujen joukkoa, josta on poistettu yhden alkion joukko $\{-3\}$.

ESIMERKKI 3

- a) Päätele kuvaajasta likimääräisesti funktion $f(x) = 4 - 3x$ nollakohta.
 b) Määritä funktion $f(x) = 4 - 3x$ nollakohta.

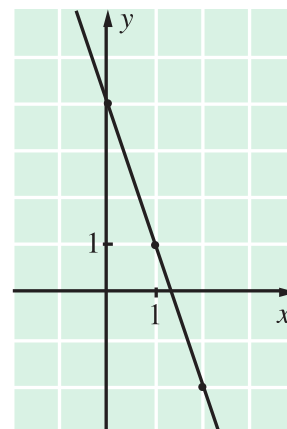
Ratkaisu

- a) Taulukoidaan funktion f arvoja.

x	$f(x) = 4 - 3x$	(x, y)
0	4	(0, 4)
1	1	(1, 1)
2	-2	(2, -2)

Funktion f kuvaaja on suora.

Funktion $f(x) = 4 - 3x$ kuvaaja leikkaa x -akselin noin pisteessä (1,3; 0). Funktion f nollakohta on noin 1,3.



- b) Funktion f nollakohdat määritetään ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 0$.

$$4 - 3x = 0$$

$$4 = 3x \quad | :3$$

$$x = \frac{4}{3}$$

Funktion f nollakohta on $\frac{4}{3}$.

Vastaus

- a) noin 1,3 b) $\frac{4}{3}$

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

48. Funktion f arvo lasketaan seuraavalla säännöllä: luvusta vähennetään luku 5 ja erotus korotetaan potenssiin 3.

- Merkitse ja laske funktion f arvot kohdissa 1 ja 7.
- Mikä on funktion f lauseke, jos muuttujaa merkitään kirjaimella s ?
- Mikä on funktion f määrittelyjoukko?

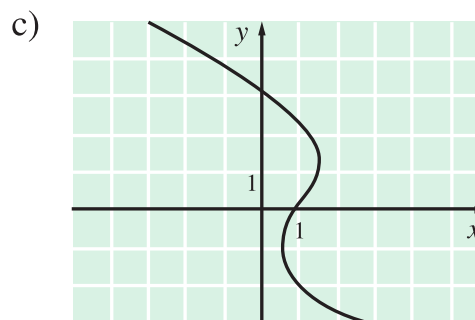
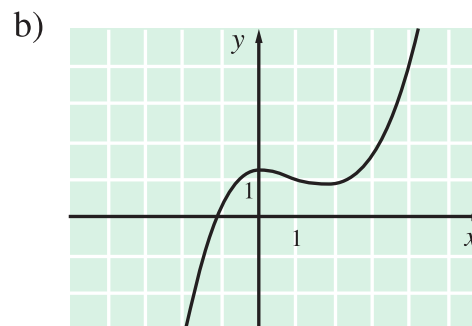
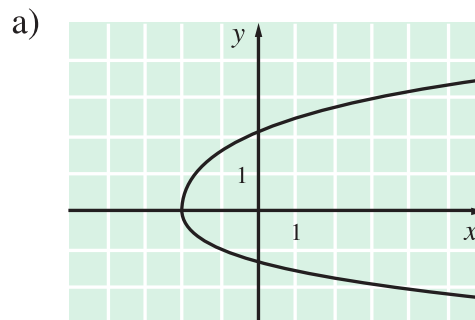
49. Mikä on funktion määrittelyjoukko?

- potenssifunktio x^5
- eksponenttifunktio 5^x
- funktio $\frac{1}{x}$
- funktio $\frac{1}{\sqrt{x}}$
- juurifunktio $\sqrt[3]{x}$
- juurifunktio $\sqrt[4]{x}$

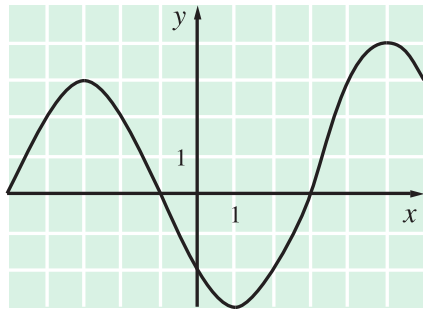
50. Mikä on funktion $f(x) = \sqrt{4-x}$ määrittelyjoukko? Piirrä funktion f kuvaaja.

51. Mikä on funktion $g(x) = \frac{x+2}{3x+2}$ määrittelyjoukko?

52. Voiko koordinaatistoon piirretty käyrä olla jonkin funktion $f(x)$ kuvaaja?



53. Koordinaatistoon on piirretty erään funktion f kuvaaja välillä $[-5, 6]$.



- Määritä kuvaajasta funktion arvot $f(-4)$, $f(0)$ ja $f(1)$.
- Missä kohdissa välillä $[-5, 6]$ funktion f arvo on 3?
- Mitkä ovat funktion f välillä $[-5, 6]$ olevat nollakohdat?
- Mikä on suurin arvo ja mikä on pienin arvo, jonka funktio f saa välillä $[-5, 6]$?

54. Määritä funktion $f(x) = 8x - 6$

- arvo kohdassa 0
- nollakohta.
- Millä muuttujan arvoilla funktion f arvot ovat negatiivisia?

55. Suvikunnan kunnassa kesämökin vuotuinen sähkölasku muodostuu 50 euron perusmaksusta ja kulutetun sähkön hinnasta, joka on 8 senttiä kilowattitunnilta (kWh). Perusmaksun joutuu maksamaan, vaikka ei vuoden aikana kuluttaisi yhtään sähköä. Määritellään funktio h asettamalla $h(x)$ = sähkölaskun suuruus euroina, jos kulutetaan x kWh.

- Laske $h(500)$ ja $h(1000)$.
- Mitkä muuttujan x arvot ovat mahdollisia kulutusmääriä?
- Muodosta funktion h lauseke.
- Piirrä funktion h kuvaaja.

56. Määritellään positiivisten kokonaislukujen joukossa funktio tek asettamalla:

$\text{tek}(n)$ = luvun n positiivisten tekijöiden lukumäärä:

Tekijällä tarkoitetaan jokaista positiivista kokonaislukua, jolla n on jaollinen. Esimerkiksi luvun 6 tekijät ovat 1, 2, 3 ja 6, joten $\text{tek}(6) = 4$. Määritä $\text{tek}(10)$, $\text{tek}(12)$ ja $\text{tek}(17)$. Piirrä funktion tek kuvaaja joukossa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

SARJA II.

PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

57. Funktion f arvo lasketaan seuraavasti: Luku kerrotaan 3:lla, tuloon lisätään 1 ja lopuksi määritetään näin saadun summan käänteisluku.

- Laske $f(2)$.
- Määritä funktion f lauseke.
- Mikä on funktion f määrittelyjoukko?

58. Merkitse ja laske

- funktion $P(t) = t^2 - t$ arvo kohdassa -3
- funktion $Q(t) = -t^2 + 3t$ arvo kohdassa 5.

59. Mikä on funktion määrittelyjoukko?

- $\sqrt{x+4}$
- $\frac{5x}{\sqrt{x+4}}$
- $\sqrt{-3x-1}$

60. Mikä on funktion $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{x-6}{x-3}$ määrittelyjoukko?

61. a) Määritä funktion $f(x) = -3x + 2$ nollakohdat.

b) Millä muuttujan x arvoilla funktion f arvot ovat positiivisia?

62. Millä muuttujan arvoilla

a) funktion $g(x) = \frac{2}{3}x - 1$ arvo on 9

b) funktion $g(x) = \frac{2}{3}x - 1$ arvo on yhtä suuri

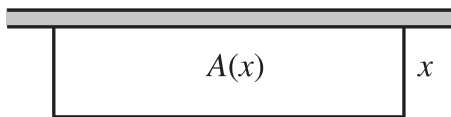
kuin funktion $h(x) = -\frac{1}{2}x$ arvo? Mikä on funktioiden arvo kyseisessä kohdassa?

63. a) Piirrä funktion $f(x) = x^2 - 5$ kuvaaja välillä $[-3, 3]$. Päätele kuvaajasta funktion nollakohtien likiarvot yhden desimaalin tarkkuudella.
b) Määritä funktion f nollakohdat.

64. Seinän viereen rajataan kanoille suorakulmion muotoinen aitaus.

Aitauksen kolmeen sivuun käytetään 10 metriä verkkoaitaa. Määritellään funktio A :

$A(x)$ = aitauksen pinta-ala, jos seinää vastaan kohtisuoran sivun pituus on x metriä.



- Laske $A(1,8)$ ja $A(3,5)$.
- Mitkä muuttujan x arvot ovat mahdollisia sivun pituuksia?
- Muodosta funktion A lauseke.
- Piirrä graafisella laskimella tai arvoja taulukoimalla funktion A kuvaaja. Päätele kuvaajasta, kuinka aitauksen mitat tulee valita, jotta sen pinta-ala olisi mahdollisimman suuri.

65. Piirrä graafisella laskimella funktion $h(x) = 0,01x^4 - 3 \cdot 1,3^x$ kuvaaja välillä $[-10, 10]$. Käytä laskimen jäljitystoimintoa (trace) ja lähennystoimintoa (zoom) ja määritä vastaukset seuraaviin kysymyksiin yhden desimaalin tarkkuudella.

- Mitkä ovat funktion arvot $h(-3)$ ja $h(2)$?
- Missä kohdissa välillä $[-10, 10]$ funktion h arvo on 2?
- Mitkä ovat funktion h välillä $[-10, 10]$ olevat nollakohdat?
- Mikä on pienin arvo, jonka funktio h saa välillä $[-10, 10]$?

66. a) Piirrä itseisarvofunktion $|x|$ kuvaaja.
b) Käytä hyväksesi a-kohdassa piirrettyä funktion $|x|$ kuvaajaa ja piirrä funktioiden $|x| + 2$ ja $-|x|$ kuvaajat.

67. Mikä on funktion $\frac{|x|}{x}$ määrittelyjoukko?

Piirrä funktion $\frac{|x|}{x}$ kuvaaja.

68. Määritellään reaalilukujen joukossa funktio int asettamalla $\text{int}(x)$ = suurin kokonaisluku, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin x .

- Määritä $\text{int}(3)$, $\text{int}(3,7)$, $\text{int}(-2)$ ja $\text{int}(-2,1)$.
- Piirrä funktion int kuvaaja välillä $[-3, 3]$.
- Funktio int on useimmissa laskimissa ja sen kuvaaja voidaan piirtää graafisella laskimella. Vertaa graafisen laskimen piirtämää kuvaajaa b-kohdassa piirtämäsi kuvaajaan. Laskimen piirtämä kuvaaja ei ole aivan oikea. Mistä tämä johtuu?

69. Palvelupuhelimeen soitetun puhelun hinta muodostuu perusmaksusta 1,50 euroa ja puhelun pituudesta riippuvasta maksusta, joka on 30 senttiä jokaiselta alkavalta minuutilta (esimerkiksi toinen minuutti alkaa tasan minuutin kuluttua). Olkoon $h(x)$ puhelun hinta euroina, jos puhelu kestää x minuuttia. Ilmaise funktio $h(x)$ edellisen tehtävän funktion int avulla ja piirrä funktion h kuvaaja graafisella laskimella.

Polynomilaskennan kertaus ja täydennys

Polynomilaskennan kertaus ja täydennys on jaettu viiteen osaan. Polynomi ja polynomifunktio, Vakiofunktio ja ensimmäisen asteen polynomifunktio, Polynomien summa ja erotus, Monomin ja polynomin tulo ja Polynomien tulo. Jokaisen osan päättää sarja tehtäviä. Luku on laadittu tukemaan polynomilaskennan osittain itsenäisesti tapahtuvaa kertaamista ja täydentämistä.

POLYNOMI JA POLYNOMIFUNKTIO

Monomi

Monomi on muuttujan potenssin ja reaaliluvun tulo. Potenssin eksponentti on positiivinen kokonaisluku. Myös pelkkä reaaliluku on monomi.

$-3x^4$, $5t$ eli $5t^1$ ja -12 ovat monomeja.

Polynomi

Polynomi on saman muuttujan monomien summa.

Lauseke $7x^4 - 6x^3 + 4x - 9$ on muuttujan x polynomi, sillä

$$7x^4 - 6x^3 + 4x - 9 = 7x^4 + (-6x^3) + 4x + (-9).$$

Yhteenlaskettavat monomit ovat polynomin *termejä*. Termit nimetään eksponentin mukaan.

Polynomin $7x^4 - 6x^3 + 4x - 9$ termi $-6x^3$ eli $-6 \cdot x^3$ on polynomin *kolmannen asteen termi*. Termin $-6x^3$ kerroin on -6 .

Polynomin $7x^4 - 6x^3 + 4x - 9$ termi -9 on polynomin *vakiotermi*.

Korkeinta astetta olevan termin eksponentti on polynomin *asteluku*.

Polynomin $7x^4 - 6x^3 + 4x - 9$ asteluku on neljä, eli polynomi on neljännen asteen polynomi.

Myös pelkkä monomi on polynomi.

Polynomi, jossa on kaksi termiä, on *binomi*.

Lauseke $5s^3 - 1$ on muuttujan s binomi.

Polynomifunktio

Funktio, jonka lauseke on polynomi, on *polynomifunktio*.

Funktio $f(t) = -t^3 + 16t + 7$ on kolmannen asteen polynomifunktio.

Jos eksponentti on positiivinen kokonaisluku, niin potenssin arvo voidaan laskea kaikilla muuttujan arvoilla, joten:

Polynomifunktion määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

ESIMERKKI 1

Mikä on monomin a) $-x^4$ b) $\frac{x^2}{4}$ kerroin?

Ratkaisu

$$\text{a) } -x^4 = -1 \cdot x^4$$

Monomin $-x^4$ kerroin on -1 .

$$\text{b) } \frac{x^2}{4} = \frac{1}{4}x^2$$

Osa voidaan laskea kertolaskulla: $\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$.

Monomin $\frac{x^2}{4}$ kerroin on $\frac{1}{4}$.

Vastaus

$$\text{a) } -1 \quad \text{b) } \frac{1}{4}$$

TEHTÄVIÄ

70. Ilmaise polynomi $5x^3 - 4x^2 + 7x - 16$ termiensä summana.

71. Mikä on polynomin $-2x^5 - x^2 + 6x - 5$

- a) asteluku
- b) ensimmäisen asteen termi
- c) toisen asteen termi
- d) toisen asteen termin kerroin
- e) kolmannen asteen termin kerroin
- f) vakiotermi?

72. Muodosta muuttujan t kolmannen asteen polynomi, jonka korkeimman asteen termin kerroin on 1, toisen asteen termin kerroin on -3 , ensimmäisen asteen termin kerroin on 0 ja jonka vakiotermi on $\frac{2}{3}$.

73. Mikä on binomin $-\frac{x^2}{3} + \frac{4x}{5}$

- a) toisen asteen termin kerroin
- b) ensimmäisen asteen termin kerroin?

74. Onko funktio muuttujan x polynomifunktio? Mikä on funktion määrittelyjoukko?

- a) $f(x) = -x^6$
- b) $g(x) = x^4 - 5x^2 + \frac{x}{3} - 5$
- c) $h(x) = x^4 - 5x^2 + \frac{3}{x} - 5$

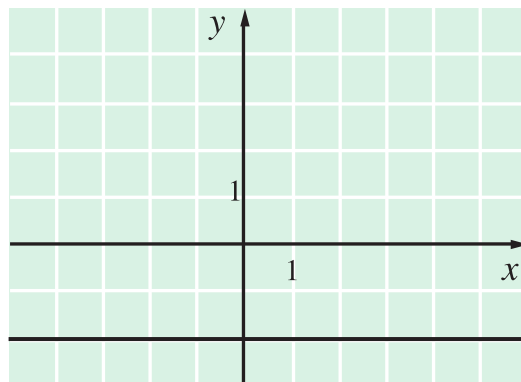
VAKIOFUNKTIO JA ENSIMMÄISEN ASTEEN POLYNOMIFUNKTIO

ESIMERKKI 2

Funktion f arvo kaikilla muuttujan x arvoilla on -2 eli $f(x) = -2$ kaikilla x . Piirrä funktion f kuvaaja.

Ratkaisu

Koska $f(0) = -2$, kuvaaja kulkee pisteen $(0, -2)$ kautta. Koska $f(1) = -2$, kuvaaja kulkee pisteen $(1, -2)$ kautta jne. Koska funktion f arvo jokaisella muuttujan x arvolla on -2 , kuvaaja on x -akselin suuntainen suora.

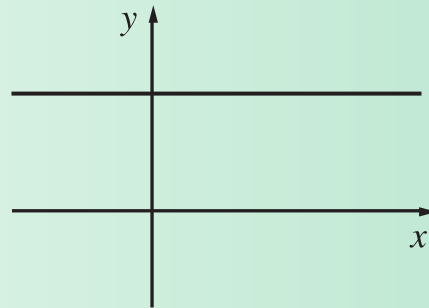


Jos polynomifunktion lausekkeessa on pelkästään vakiotermi, niin funktion arvo on kaikilla muuttujan arvoilla sama. Funktiota sanotaan vakiofunktiksi.

Vakiofunktio

Funktio, jolle $f(x) = a$ kaikilla x , on *vakiofunktio*.

Vakiofunktion kuvaaja on x -akselin suuntainen suora.



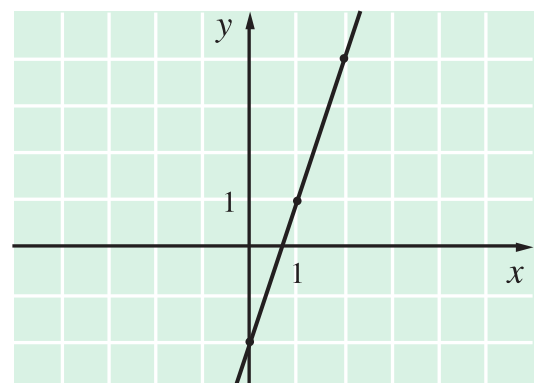
ESIMERKKI 3

Piirrä ensimmäisen asteen polynomifunktion $3x - 2$ kuvaaja.

Ratkaisu

Taulukoidaan funktion arvoja ja piirretään kuvaaja.

x	$3x - 2$	(x, y)
0	-2	$(0, -2)$
1	1	$(1, 1)$
2	4	$(2, 4)$



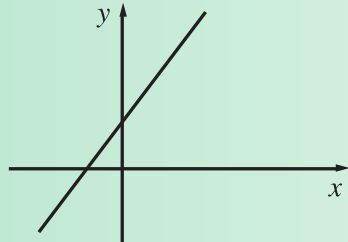
Funktion $3x - 2$ kuvaaja on nouseva suora.

Ensimmäisen asteen polynomifunktio

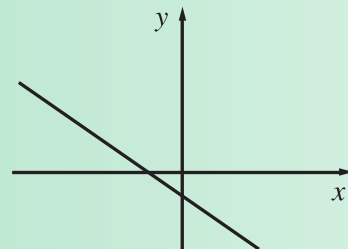
Ensimmäisen asteen polynomifunktion $ax + b$, missä $a \neq 0$, kuvaaja on nouseva tai laskeva suora.

Kuvaaja on

- nouseva suora, jos $a > 0$,



- ja laskeva suora, jos $a < 0$.



TEHTÄVIÄ

75. Laske vakiofunktion $g(x) = 4$ arvo muuttujan x arvolla

- a) 0 b) 2003 c) $-\sqrt{7}$.

Piirrä funktion g kuvaaja.

76. Piirrä funktioiden $x + 3$, $3x$, $-x + 3$ ja $-3x$ kuvaajat.

77. Millä vakion r arvoilla funktion $f(x) = (6 - 4r)x + 2r$ kuvaaja on

- a) nouseva suora
b) laskeva suora
c) x -akselin suuntainen suora?

Piirrä c-kohdan suora.

POLYNOMIEN SUMMA JA EROTUS

ESIMERKKI 4

Laske $-x^3 + 3x^3 - \frac{x^3}{2}$.

Ratkaisu

$$-x^3 + 3x^3 - \frac{x^3}{2} = -x^3 + 3x^3 - \frac{1}{2}x^3$$

$$= (-1 + 3 - \frac{1}{2})x^3$$

Samaa astetta olevien monomien yhteen- ja vähennyslasku perustuu osittelulakiin:
 $ac + bc = (a + b)c$.

$$= \frac{3}{2}x^3$$

Vastaus

$$\frac{3}{2}x^3$$

ESIMERKKI 5

Merkitse ja laske polynomien $x^2 + 3x - 6$ ja $-4x^2 + x - 2$ summa.

Ratkaisu

$$(x^2 + 3x - 6) + (-4x^2 + x - 2)$$

$$= x^2 + 3x - 6 - 4x^2 + x - 2$$

$$= -3x^2 + 4x - 8$$

Molemmat polynomit ovat termiensä summia. Koska yhteenlasku voidaan laskea missä järjestyksessä tahansa, summa voidaan kirjoittaa ilman sulkeita kirjoittamalla polynomien termit peräkkäin.

Yhdistetään samaa astetta olevat termit:
 $x^2 - 4x^2 = -3x^2$, $3x + x = 4x$, $-6 - 2 = -8$

Vastaus

$$-3x^2 + 4x - 8$$

ESIMERKKI 6

Merkitse ja laske polynomien $x^3 - 2x + 4$ ja $-x^2 + 3x - 5$ erotus.

Ratkaisu

$$(x^3 - 2x + 4) - (-x^2 + 3x - 5)$$

Vähennyslasku muutetaan yhteenlaskuksi käyttäen ominaisuutta $a - b = a + (-b)$. Vähentäjä $-x^2 + 3x - 5$ muutetaan vasta-polynomiksi vaihtamalla kaikkien termien merkit.

$$= (x^3 - 2x + 4) + (x^2 - 3x + 5)$$

Poistetaan sulkeet.

$$= x^3 - 2x + 4 + x^2 - 3x + 5$$

Polynomit ovat nyt peräkkäin niin, että vähentäjän $-x^2 + 3x - 5$ kaikkien termien merkit ovat vaihtuneet. Edellinen välivaihe voidaan jättää väliin ja oikaista suoraan tähän muotoon.

$$= x^3 + x^2 - 5x + 9$$

Vastaus

$$x^3 + x^2 - 5x + 9$$

ESIMERKKI 7

Ratkaise yhtälö $3x - \frac{x-5}{4} = 1$.

Ratkaisu

$$3x - \frac{x-5}{4} = 1 \quad | \cdot 4$$

Yhtälön molemmat puolet kerrotaan nimittäjällä 4.

$$4 \cdot 3x - \frac{\cancel{4}^1(x-5)}{\cancel{4}_1} = 4 \cdot 1$$

Supistetaan.

$$12x - (x - 5) = 4$$

Vähentäjä on merkittävä sulkeisiin.

$$12x - x + 5 = 4$$

Poistetaan sulkeet.

$$11x = -1 \quad | : 11$$

$$x = -\frac{1}{11}$$

Vastaus

$$x = -\frac{1}{11}$$

ESIMERKKI 8

Laske muuttujan x polynomien $-ax^2 + 3$ ja $5x^2 - x$ summa.

Ratkaisu

$$(-ax^2 + 3) + (5x^2 - x)$$

$$= -ax^2 + 3 + 5x^2 - x$$

Termit $-ax^2$ ja $5x^2$ ovat samaa astetta. Ne yhdistetään käyttämällä osittelulakia.

$$= (-a + 5)x^2 - x + 3$$

Toisen asteen termin kerroin on $-a + 5$.

Vastaus

$$(-a + 5)x^2 - x + 3$$

TEHTÄVIÄ

78. Laske.

a) $x - \frac{3}{2}x$ b) $x^2 + \frac{x^2}{3}$

79. Merkitse ja laske polynomien

$$x^2 - 4x + 1 \text{ ja } -x^2 + x - 3$$

a) summa b) erotus.

80. Merkitse ja laske polynomien erotus.

a) $3x$ ja $-2x + 1$ b) -5 ja $6x - 3$

81. Laske.

a) $(2x^2 - 3x + 1) + (-3x^2 + 3x - 2)$

b) $(a^2 - a + 1) - (a^2 + a)$

82. Laske

$$(2a^3 - 3a^2 + 4a) - (-3a^2 + 4a - 1).$$

83. Laske

$$(-3x^2 + x) + \left(\frac{5}{2}x^2 - \frac{4}{3}x\right).$$

84. Ratkaise yhtälö.

a) $3x - \frac{1 - 4x}{2} = x$

b) $3x + 5 - \frac{x + 1}{2} = 1$

85. Ratkaise epäyhtälö

$$\frac{2x - 1}{2} - \frac{3x + 1}{4} > 0.$$

86. Laske muuttujan x polynomien $ax - 2$ ja $3x + a$ erotus. Mikä on erotuksen

a) ensimmäisen asteen termin kerroin

b) vakiotermi?

MONOMIN JA POLYNOMIN TULO

ESIMERKKI 9

Laske monomien tulo.

a) $-3x^4$ ja $5x^2$ b) $3x$ ja $\frac{x^2}{6}$

Ratkaisu

a) $(-3x^4)(5x^2)$

Järjestetään tulon tekijät: kertoimet alkuun ja sitten muuttujan potenssit.

$$= -3 \cdot 5 \cdot x^4 \cdot x^2$$

Potenssit kerrotaan käyttäen samankantaisten potenssien tulon kaavaa $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ tai purkamalla potenssit tuloiksi: $x^4 \cdot x^2 = xxxx \cdot xx$.

$$= -15x^6$$

Kertoimeksi tulee kertoimien tulo.

b) Kertoimet voidaan kerätä eteen:

$$3x \cdot \frac{x^2}{6} = 3x \cdot \frac{1}{6}x^2 = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot x \cdot x^2 = \frac{1}{2}x^3$$

tai voidaan laskea kuin murtoluvuilla:

$$3x \cdot \frac{x^2}{6} = \frac{3x}{1} \cdot \frac{x^2}{6} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}}x \cdot x^2}{\underset{2}{\cancel{6}}} = \frac{x^3}{2}$$

Vastaus

a) $-15x^6$ b) $\frac{1}{2}x^3$ ($= \frac{x^3}{2}$)

ESIMERKKI 10

Laske monomin $-3x^4$ ja polynomin $2x^3 - x + 4$ tulo.

Ratkaisu

$$-3x^4(2x^3 - x + 4)$$

Käytetään osittelulakia $a(b + c) = ab + ac$ ja sovelletaan kertolaskun merkkisääntöjä.

$$\begin{aligned} &= -3x^4 \cdot 2x^3 + 3x^4 \cdot x - 3x^4 \cdot 4 \\ &= -6x^7 + 3x^5 - 12x^4 \end{aligned}$$

Vastaus

$$-6x^7 + 3x^5 - 12x^4$$

ESIMERKKI 11

Laske $7x - 5x(x - 3)$.

Ratkaisu

$$7x - 5x(x - 3)$$

Laskujärjestyssääntöjen mukaisesti kertolasku lasketaan ensin.

$$= 7x - (5x^2 - 15x)$$

Kertolaskun tulos merkitään sulkeisiin.

$$= 7x - 5x^2 + 15x$$

Suoritetaan vähennyslasku.

$$= -5x^2 + 22x$$

Vastaus

$$-5x^2 + 22x$$

ESIMERKKI 12

Ilmaise polynomi tulomuodossa erottamalla termien yhteiset tekijät.

- a) $12x + 15$
- b) $4x^3 - x^2$
- c) $12x^4 - 16x^2 + 8x$

Ratkaisu

- a) Binomin $12x + 15$ molemmilla termeillä on tekijänä luku 3, sillä $12x = 3 \cdot 4x$ ja $15 = 3 \cdot 5$.

$$12x + 15$$

$$= 3 \cdot 4x + 3 \cdot 5$$

Käytetään osittelulakia. $ab + ac = a(b + c)$

$$= 3(4x + 5)$$

Tarkistetaan suorittamalla kertolasku.

- b) Binomin $4x^3 - x^2$ termeillä $4x^3$ ja $-x^2$ on yhteinen tekijä x^2 , sillä $4x^3 = 4x \cdot x^2$ ja $-x^2 = -1 \cdot x^2$.

$$4x^3 - x^2 = x^2(4x - 1)$$

Tarkistetaan suorittamalla kertolasku.

- c) Polynomin $12x^4 - 16x^2 + 8x$ termeillä on yhteinen tekijä $4x$.

$$12x^4 - 16x^2 + 8x = 4x(3x^3 - 4x + 2)$$

Tekijät voidaan erottaa myös vaiheittain:

$$12x^4 - 16x^2 + 8x = 4(3x^4 - 4x^2 + 2x)$$

$$= 4x(3x^3 - 4x + 2)$$

Vastaus

- a) $3(4x + 5)$ b) $x^2(4x - 1)$ c) $4x(3x^3 - 4x + 2)$

ESIMERKKI 13

Supista polynomien osamäärä.

$$\text{a) } \frac{10x + 15}{20x} \quad \text{b) } \frac{8x + 4}{6x + 3} \quad \text{c) } \frac{3x^2 - x}{2x}$$

Ratkaisu

Kahden polynomin osamäärä voidaan supistaa, kuten murtolukukin supistetaan, osoittajan ja nimittäjän yhteisellä tekijällä. Yhteiset tekijät nähdään, kun osoittaja ja nimittäjä saatetaan tulomuotoon.

$$\text{a) } \frac{10x + 15}{20x}$$

Osoittaja saatetaan tulomuotoon erottamalla termien yhteinen tekijä 5. Nimittäjä on jo tulon muodossa.

$$= \frac{\cancel{5}^1(2x + 3)}{\cancel{20}_4x}$$

Luku 5 on osoittajan ja nimittäjän yhteinen tekijä.

$$= \frac{2x + 3}{4x}$$

$$\text{b) } \frac{8x + 4}{6x + 3}$$

Osoittajan termeillä on yhteinen tekijä 4. Nimittäjän termeillä on yhteinen tekijä 3.

$$= \frac{4(\cancel{2x+1}^1)}{3(\cancel{2x+1}_1)}$$

Binomi $2x + 1$ on osoittajan ja nimittäjän yhteinen tekijä.

$$= \frac{4}{3}$$

$$\text{c) } \frac{3x^2 - x}{2x}$$

Osoittajan termeillä on yhteinen tekijä x .

$$= \frac{\cancel{x}^1(3x - 1)}{\cancel{2x}_1} = \frac{3x - 1}{2}$$

Monomi x on osoittajan ja nimittäjän yhteinen tekijä.

Vastaus

$$\text{a) } \frac{2x + 3}{4x} \quad \text{b) } \frac{4}{3} \quad \text{c) } \frac{3x - 1}{2}$$

TEHTÄVIÄ

87. Laske.

- a) $-x \cdot 5x^6$
 b) $-6x \cdot \frac{x}{4} \cdot \left(-\frac{x^3}{3}\right)$
 c) $4x^2 \cdot (-5ax^3)$

88. Laske.

- a) $(-5x)^2$ b) $\left(\frac{x}{3}\right)^2$
 c) $(4x^3)^2$ d) $(-3x^4)^3$

89. Laske.

- a) $-t(t^3 - 7t + 5)$ b) $5x^2(x^4 + x^3 - x)$

90. Laske.

- a) $2 + 4(x - 5)$ b) $6s - s(s - 4)$

91. Ratkaise yhtälö $4 - 2(x - 3) = x + 10$.**92.** Laske $-3(-x^2 + 2x - 4) - 2x(x - 5)$.**93.** Ratkaise yhtälö.

- a) $\frac{1}{2} - \frac{x+4}{3} = 2x$
 b) $\frac{3x^2-1}{6} - \frac{x^2-x}{2} = x$

94. Ratkaise $1 - \frac{x-6}{2} \geq x - \frac{x+6}{6}$.**95.** Ilmaise polynomi tulomuodossa erottamalla termien yhteiset tekijät.

- a) $12x - 3$ b) $x^2 + x$
 c) $2x^2 - 6x$ d) $x^4 + 4x^3 - x^2$
 e) $8x^3 + 6x^2 + 2x$

96. Supista.

- a) $\frac{3x+12}{6x}$ b) $\frac{5t+10}{4t+8}$

97. Supista.

- a) $\frac{t}{t^2+t}$ b) $\frac{x^2+10x}{5x^2}$
 c) $\frac{5x+10}{3x^2+6x}$

98. Ilmaise polynomi tulomuodossa erottamalla termien yhteiset tekijät.

- a) $6x^6 - x^2$ b) $x^{n+2} - x^2$
 c) $x^{n+2} - x^n$ d) $x^{2n} - x^n$

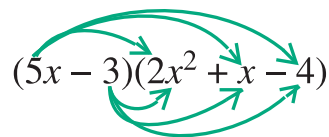
99. Osoita, että kolmen peräkkäisen kokonaisluvun summa on aina jaollinen luvulla 3 (eli summalla on tekijänä luku 3).**100.** Osoita, että neljän peräkkäisen parittoman kokonaisluvun summa on aina jaollinen luvulla 8.

POLYNOMIEN TULO

ESIMERKKI 14

Laske polynomien $5x - 3$ ja $2x^2 + x - 4$ tulo.

Ratkaisu



$$(5x - 3)(2x^2 + x - 4)$$

Jokaisella kertojan termillä kerrotaan jokainen kerrottavan termi. Tulossa on ennen sieventämistä $2 \cdot 3 = 6$ termiä.

$$= 5x \cdot 2x^2 + 5x \cdot x - 5x \cdot 4 - 3 \cdot 2x^2 - 3 \cdot x + 3 \cdot 4$$

$$= 10x^3 + 5x^2 - 20x - 6x^2 - 3x + 12$$

$$= 10x^3 - x^2 - 23x + 12$$

Vastaus

$$10x^3 - x^2 - 23x + 12$$

TEHTÄVIÄ

101. Laske.

- a) $(4x - 3)(3x - 4)$
- b) $(x^2 - 3)(x - 4)$
- c) $(-a^3 + a^2)(a^6 - a^4)$
- d) $(x + 2)(x^2 - x + 4)$

102. a) $(2x - 3)(2x + 3)$ b) $(3x + 5)(3x + 5)$ c) $(u - 6)^2$ **103.** a) $7(x - 3)(x + 1)$ b) $x^2(3x + 1)(x - 2)$ **104.** a) $(5 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})$ b) $(\sqrt{3} + 5\sqrt{2})(4\sqrt{3} - \sqrt{2})$ **105.** $(x - 3)(x - 4) - (x + 5)(x - 2)$ **106.** $x(x + 6)(x - 1) - (x - 2)(x - 4)$ **107.** $6x - x(x - 2)(x - 3)$ **108.** Päättele, mitä astetta polynomien tulo on.

- a) $x^2 + 7x - 9$ ja $5x^3 + 11x^2 - 16x + 12$
- b) $2x - 3$, $x + 7$ ja $x^2 + 7x - 1$
- c) $x - 4$, $(x + 3)^2$ ja $x^4 - 1$

109. Määritä tulon vakiotermi ja korkeimman asteen termi.

- a) $(t - 1)(t + 2)(t - 3)(t + 4)(t - 5)$
- b) $5t(2t^3 - 2t + 19)(3t^5 + 15t - 12)$.

110. Laske lausekkeen arvo, kun $x = \frac{3}{2}$.

Harkitse, kannattaako lauseke ennen muuttujan arvon sijoittamista saattaa toiseen muotoon.

- a) $6x(x - 1)(x - 2)$
- b) $6x(x - 1) - 2x(3x - 4)$

111. Taulua, jonka leveys on 50 cm ja korkeus 30 cm, ympäröi kehys. Mikä on kehyksen pinta-ala, jos kehyksen leveys on x senttimetriä?**112.** Suorakulmion muotoisen nurmikentän pituus on 100 m ja leveys 50 m. Kentän poikki rakennetaan kummankin sivun suuntaiset hiekkakäytävät. Mikä on jäljelle jäävän nurmikentän pinta-ala, jos käytävien leveys on x metriä?**113.** Suorakulmaisen särmiön muotoisen laatikon sisämitat ovat 30 cm, 40 cm ja 50 cm. Mikä on laatikon seinämien kokonaistilavuus, jos seinämän paksuus on x cm?**114.** Laske $(a - b)(3a + b) - a(a - 1)(a - 2b)$.**115.** Laske muuttujan t binomien $t + a$ ja $t - 2$ tulo. Mikä on tulon

- a) ensimmäisen asteen termin kerroin
- b) vakiotermi?

116. Laske binomien tulo $(3x^2 - \sqrt{2})(x^2 - \sqrt{3})$. Mikä on tulon

- a) toisen asteen termin kerroin
- b) vakiotermi?

Summan ja erotuksen tulo

JOHDANTOESIMERKKI 1

- a) Laske lukujen a ja b summan ja erotuksen tulo $(a + b)(a - b)$.
 b) Käytä a-kohdan tulosta kaavana ja laske tulo $(x + 5)(x - 5)$.

Ratkaisu

$$a) \quad (a + b)(a - b) = aa - ab + ba - bb = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Saadaan kaava:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Siis kahden luvun summan ja erotuksen tulo on lukujen neliöiden erotus.

- b) Tulo $(x + 5)(x - 5)$ on monomien x ja 5 summan ja erotuksen tulo.

$$\begin{aligned} (x + 5)(x - 5) & \quad \text{Monomien } x \text{ ja } 5 \text{ summan ja erotuksen tulo} \\ = x^2 - 5^2 & \quad \text{Monomien } x \text{ ja } 5 \text{ neliöiden erotus.} \\ = x^2 - 25 \end{aligned}$$

Vastaus

$$a) \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \qquad b) \quad (x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$$

Summan ja erotuksen tulon muistikaava

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Summan ja erotuksen tulo on neliöiden erotus.

ESIMERKKI 2

Laske $(5x^3 + 4)(5x^3 - 4)$.

Ratkaisu

$$(5x^3 + 4)(5x^3 - 4)$$

$$= (5x^3)^2 - 4^2$$

$$= 5^2(x^3)^2 - 4^2 = 25x^6 - 16$$

Monomien $5x^3$ ja 4 summan ja erotuksen tulo.

Monomien $5x^3$ ja 4 neliöiden erotus.

Monomin $5x^3$ neliö merkitään käyttäen sulkeita.

Vastaus

$$25x^6 - 16$$

ESIMERKKI 3

Laske $(7 - 3\sqrt{5})(7 + 3\sqrt{5})$.

Ratkaisu

$$(7 - 3\sqrt{5})(7 + 3\sqrt{5})$$

$$= 7^2 - (3\sqrt{5})^2$$

$$= 7^2 - 3^2(\sqrt{5})^2$$

$$= 49 - 9 \cdot 5 = 4$$

$$(a - b)(a + b)$$

$$= a^2 - b^2$$

$$(\sqrt{5})^2 = 5$$

Vastaus

$$4$$

ESIMERKKI 4

Jaa tekijöihin.

a) $y^2 - 49$ b) $3x^2 - 12$

Ratkaisu

a) Lauseke $y^2 - 49$ on monomien y ja 7 neliöiden erotus.

$$y^2 - 49 = y^2 - 7^2$$

Monomien y ja 7 neliöiden erotus.

$$a^2 - b^2$$

$$= (y + 7)(y - 7)$$

$$= (a + b)(a - b)$$

b) $3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$

Erotetaan termien yhteinen tekijä 3 .

$$= 3(x^2 - 2^2)$$

$x^2 - 4$ on monomien x ja 2 neliöiden erotus.

$$= 3(x + 2)(x - 2)$$

Vastaus

a) $(y + 7)(y - 7)$ b) $3(x + 2)(x - 2)$

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ**117.** Laske.

- a) $(x+1)(x-1)$ b) $(x+7)(x-7)$
 c) $(5+x)(5-x)$ d) $(t+4)(t-4)$

118. Laske.

- a) $(x-3)(x+3)$ b) $(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})$
 c) $(3x+1)(3x-1)$ d) $(5x^3-1)(5x^3+1)$

119. Laske.

- a) $4(x+5)(x-5)$
 b) $x(x-6)(x+6)$
 c) $(x^2+9)(x+3)(x-3)$

120. Laske.

- a) $(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})$
 b) $(4\sqrt{3}-3\sqrt{2})(4\sqrt{3}+3\sqrt{2})$

121. Osoita, että luvut ovat toistensa käänteislukuja.

- a) $2-\sqrt{3}$ ja $2+\sqrt{3}$
 b) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$ ja $\sqrt{6}-\sqrt{5}$

122. Jaa tekijöihin.

- a) x^2-1 b) x^2-25
 c) t^2-100 d) $10t^2-10$

123. Supista polynomien osamäärä.

- a) $\frac{t^2-4}{t+2}$ b) $\frac{t-3}{t^2-9}$
 c) $\frac{5t^2-5}{t-1}$

124. Neliön muotoisen ikkunan korkeutta suurennettiin 25 cm ja leveyttä pienennettiin 25 cm. Kuinka muuttui ikkunan

- a) pinta-ala b) ympärysmitta?

125. Sievennä.

- a) $x-2(x+2)$
 b) $(x-2)(x+2)$
 c) $x-2(x+2)(x-2)$

126. Sievennä.

- a) $x(x-\frac{1}{x})(x+\frac{1}{x})$
 b) $(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x-1)$

127. Laske ilman laskinta.

- a) 501^2-500^2
 b) 501^2-499^2
 c) $\left(\frac{139}{136}\right)^2-\left(\frac{3}{136}\right)^2$
 d) $\left(\frac{50}{99}\right)^2-\left(\frac{49}{99}\right)^2$

128. Laske ilman laskinta.

- a) $103 \cdot 97$ b) $49 \cdot 51$
 c) $94 \cdot 86$

SARJA II.**PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ****129.** Laske.

- a) $(x + 8)(x - 8)$
 b) $3(x - 10)(x + 10)$
 c) $5(x + \frac{1}{5})(x - \frac{1}{5})$

130. Laske.

- a) $(6x + 5)(6x - 5)$
 b) $(4x - 3)(3x + 4)$
 c) $(3x - 4)(3x + 4)$

131. Laske.

- a) $(5a^2 + 4b)(5a^2 - 4b)$
 b) $(1 + 9ab^2)(1 - 9ab^2)$
 c) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$

132. Laske.

- a) $(t^2 + 10)(t^2 - 10)$
 b) $(1 - 5t^3)(1 + 5t^3)$
 c) $t(6t - 8)(6t + 8)$

133. Jaa tekijöihin.

- a) $x^2 - 9$ b) $5x^2 - 20$
 c) $x^3 - 16x$

134. Supista polynomien osamäärä.

- a) $\frac{x^2 - 9}{5x - 15}$ b) $\frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$
 c) $\frac{x^2 - 1}{(x + 1)^2}$

135. Jaa tekijöihin.

- a) $x^4 - 1$ b) $x^5 - x$

136. Sievennä.

- a) $16 - 4(x + 2)(x - 2)$
 b) $6x - x(x - 3)(x + 3)$

137. Sievennä.

- a) $1 + x(1 - x)$
 b) $(1 + x)(1 - x)$
 c) $1 - x(1 + x)(1 - x)$

138. Jos lausekkeen nimittäjä on summa tai erotus, jossa esiintyy neliöjuuri, niin neliöjuuri voidaan poistaa nimittäjästä sopivalla lavennuksella.

- a) Lavenna osamäärä $\frac{1}{3 - \sqrt{5}}$ summalla

$$3 + \sqrt{5}.$$

- b) Lavenna osamäärä $\frac{5}{\sqrt{3} + 1}$ erotuksella

$$\sqrt{3} - 1.$$

c) Muotoile a- ja b-kohtien nojalla sääntö neliöjuurien poistamiseksi nimittäjästä. Perustele, miksi sääntö toimii.

- d) Poista neliöjuuri lausekkeiden $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$ ja

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{-1 + \sqrt{5}}$$
 nimittäjistä.

139. Laske.

- a) $(2^{100} + 1)(2^{50} + 1)(2^{50} - 1) + 1$
 b) $x^2(1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{x^2})(1 - \frac{1}{x})$

140. Kahden luvun erotus on -3 ja neliöiden erotus 2 . Mikä on lukujen summa?**141.** Kokonaisluku vähennetään kuutiostaan.

Osoita, että saatu luku on aina

- a) kolmen peräkkäisen kokonaisluvun tulo
 b) jaollinen luvuilla 2 ja 3 .

142. Ykköstä suuremman luonnollisen luvun

neljännestä potenssista vähennetään luku yksi.

Osoita, että tämä luku on jaollinen sekä alkupe-
 räistä lukua edeltävällä että sitä seuraavalla
 luonnollisella luvulla.

143. a) Murtoluku $\frac{2^{24} - 1}{2^{48} - 1}$ supistuu. Mikä on luvun supistettu muoto?

b) Suuria alkulukuja etsitään yleensä muotoa $2^n - 1$ olevien lukujen joukosta. Jos n on parillinen ja $n > 2$, niin muotoa $2^n - 1$ oleva luku ei kuitenkaan koskaan ole alkuluku. Osoita tämä. Alkuluku on ykköstä suurempi kokonaisluku, joka on jaollinen vain itsellään ja luvulla 1.

144. Vaikka likiarvo $\sqrt{10\,001} \approx 100$ on viiden numeron tarkkuudella oikea, niin tätä likiarvoa ei voida suoraan hyödyntää lausekkeen

$\frac{3}{\sqrt{10\,001} - 100}$ likiarvon laskemiseen. Jakajaksi tulisi nolla ja esimerkiksi sovellustehtävää suorittava tietokoneohjelma tekisi virheen.

Poista lausekkeen nimittäjästä neliöjuuri (tehtävä 138) ja sijoita sen jälkeen likiarvo $\sqrt{10\,001} \approx 100$.

Vertaa tulosta laskimen lausekkeelle antamaan likiarvoon. (On kyse matematiikan sovelluksissa tärkeästä ilmiöstä. Tuloksen tarkkuuden kannalta ei ole yhdentekevää, mitä lausekkeen muotoa laskemisessa käytetään.)

145. Jos tehtävässä 12 tutkittuun lausekkeeseen $100(198 - 140\sqrt{2})$ sijoitetaan likiarvo

$\sqrt{2} \approx 1,4$, tulokseksi saadaan 200, joka poikkeaa suuresti lausekkeen oikeasta arvosta.

Saata lauseke sellaiseen muotoon, että likiarvon

$\sqrt{2} \approx 1,4$ sijoittaminen antaa tarkemman tuloksen.

b) Neliö $(a - b)^2$ tarkoittaa tuloa $(a - b)(a - b)$.

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= (a - b)(a - b) \\ &= a^2 - ab - ba + b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

Saadaan kaava:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$a:n$ neliö vähennetään $a:n$ ja $b:n$ kaksinkertainen tulo $b:n$ neliö

Lukujen erotuksen neliö muodostuu siis lukujen neliöiden summasta, josta on vähennetty lukujen kaksinkertainen tulo.

Sovelletaan kaavaa erotuksen $3x - 4$ neliöön.

$$\begin{aligned}(3x - 4)^2 &= (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 4 + 4^2 \\ &= 9x^2 - 24x + 16\end{aligned}$$

$(a - b)^2$, missä $a = 3x$, $b = 4$
 $a^2 - 2ab + b^2$, monomien $3x$ ja 4 neliöiden summasta vähennetään monomien $3x$ ja 4 kaksinkertainen tulo.

Vastaus

$$\begin{aligned}\text{a) } (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, & (x + 7)^2 &= x^2 + 14x + 49 \\ \text{b) } (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, & (3x - 4)^2 &= 9x^2 - 24x + 16\end{aligned}$$

Summan neliön ja erotuksen neliön muistikaavat

Summan neliö:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Neliöiden summaan lisätään kaksinkertainen tulo.

Erotuksen neliö:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Neliöiden summasta vähennetään kaksinkertainen tulo.

ESIMERKKI 2

Laske. a) $(x^3 + 5)^2$ b) $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2$

Ratkaisu

$$\begin{aligned} \text{a) } (x^3 + 5)^2 & \quad \text{Summan neliö } (a + b)^2, \text{ missä } a = x^3 \text{ ja } b = 5. \\ &= (x^3)^2 + 2 \cdot x^3 \cdot 5 + 5^2 \quad a^2 + 2ab + b^2 \\ &= x^6 + 10x^3 + 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 & \quad \text{Erotuksen neliö } (a - b)^2, \text{ missä } a = \frac{1}{2}x \text{ ja } b = 1. \\ &= \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x \cdot 1 + 1^2 \quad a^2 - 2ab + b^2 \\ &= \frac{1}{4}x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

Vastaus

$$\text{a) } x^6 + 10x^3 + 25 \quad \text{b) } \frac{1}{4}x^2 - x + 1$$

ESIMERKKI 3

Laske $(4x - 3)^3$.

Ratkaisu

$$\begin{aligned} (4x - 3)^3 &= (4x - 3)(4x - 3)^2 & \text{Kuutio puretaan tuloksi, jonka toinen tekijä on neliö.} \\ &= (4x - 3)((4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3 + 3^2) & \text{Lasketaan muistikaavalla erotuksen neliö.} \\ &= (4x - 3)(16x^2 - 24x + 9) & \text{Lasketaan polynomien tulo.} \\ &= 64x^3 - 96x^2 + 36x - 48x^2 + 72x - 27 \\ &= 64x^3 - 144x^2 + 108x - 27 \end{aligned}$$

Vastaus

$$64x^3 - 144x^2 + 108x - 27$$

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

146. Laske.

a) $(a + 4)^2$ b) $(x + 1)^2$ c) $(x + 10)^2$

147. Laske.

a) $(x - 5)^2$ b) $(x - 1)^2$ c) $(t - 2)^2$

148. Laske.

a) $(4s + 3)^2$ b) $(6t - 4)^2$ c) $(5x - 2)^2$

149. Laske.

a) $(a^4 - 1)^2$ b) $(4x^2 + 3)^2$ c) $(5a^3 - 2b^2)^2$

150. Laske.

a) $3(2x + 5)^2$ b) $x(x + 7)^2$

151. Laske.

a) $(a - \frac{1}{2})^2$ b) $(a + \frac{3}{2})^2$
c) $(a^2 - \frac{5}{2})^2$ d) $(a^2 + \frac{1}{2})(a^2 - \frac{1}{2})$

152. Laske.

a) $(-x + 5)^2$ b) $(-t - 3)^2$
c) $(-s + 3)(s + 3)$

153. Laske.

a) $(1 + \sqrt{2})^2$ b) $(4\sqrt{6} - 9)^2$

154. Laske.

a) $(x - 2)(x + 1)^2$ b) $(x + 1)^3$

155. Ratkaise yhtälö.

a) $(x + 3)^2 = x^2 + 9$
b) $(x - 5)^2 = x^2 - 25$

156. Täydennä lausekkeisiin puuttuvat termit.

a) $(x \quad)^2 = x^2 + 12x \quad$

b) $(x \quad)^2 = x^2 - 16x \quad$

c) $(x \quad)^2 = x^2 - 3x \quad$

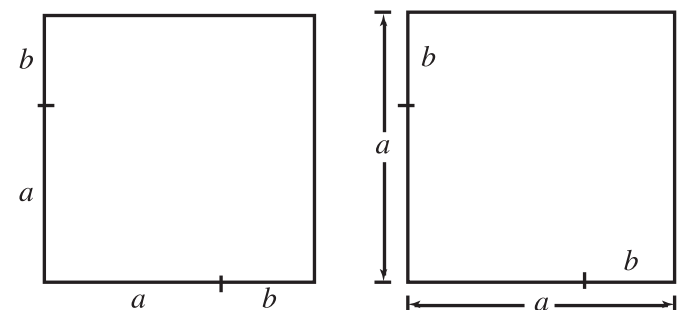
d) $(x \quad)^2 = x^2 + x \quad$

157. Osoita: Jos kahden kokonaisluvun erotuksen neliöön lisätään lukujen tulo nelinkertaisena, saatu luku on kokonaisluvun neliö.

158. Laske.

a) $(x - \frac{1}{x})^2$ b) $(3x + \frac{1}{x})^2$ c) $(x^2 - \frac{1}{2x})^2$

159. Perustele kaavat geometrisesti pinta-alojen avulla.



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

160. Laske summan $a + b + c$ (ns. *trinomin*) neliö $(a + b + c)^2$. Muotoile tulos myös sanallisesti. Käytä tulosta kaavana ja laske

a) $(x + y + 5)^2$ b) $(x^2 - x + 3)^2$.

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

161. Laske.

- a) $(12 - x)^2$ b) $(s + \frac{7}{2})^2$
 c) $(4x - 5)^2$ d) $(5x^5 + 6)^2$

162. Laske.

- a) $(3a + b)^2$ b) $(1 - 4ab)^2$
 c) $(a^2 + b^2)^2$ d) $\frac{1}{3}(6a - 3b)^2$

163. Laske.

- a) $(x - 3)^2 - (x + 3)^2$
 b) $(x + 1)(x - 1) - (1 - x)^2$
 c) $x - 2(x - 2)^2$

164. Laske.

- a) $(-3 + t)^2$ b) $(-5 - t)^2$
 c) $(t + 1)(-t + 1)$ d) $(t + 1)(-t - 1)$
 e) $(t - 1)(-t - 1)$

165. Laske.

- a) $(1 - \sqrt{3})^2$ b) $(\sqrt{7} + \sqrt{6})^2$

166. Laske.

- a) $(2 - t)^3$ b) $2 - t(2 - t)^2$

167. Ratkaise yhtälö.

- a) $(x - 1)^2 = (x - 2)^2$
 b) $(x + 10)^2 = x^2 + 20$

168. Ratkaise epäyhtälö.

- a) $(x - 1)^2 > x^2$
 b) $(x - 3)^2 < (x + 12)^2$

169. Millä välillä olevilla luvuilla on seuraava ominaisuus: kun lukuun lisätään 3 ja lasketaan summan neliö, niin saadaan luku, joka on pienempi kuin alkuperäisen luvun neliö?

170. Määritä vakiolle a sellainen arvo, että lauseke on binomin neliö. Minkä binomin neliö lauseke tällöin on?

- a) $x^2 + 18x + a$ b) $x^2 - 8x + a$
 c) $x^2 - 5x + a$

171. a) Määritä kaksi peräkkäistä kokonaislukua, joiden neliöiden erotus on 2005.

b) Osoita, että jokainen pariton kokonaisluku voidaan ilmaista kahden peräkkäisen kokonaisluvun neliöiden erotuksena.

172. a) Osoita, että $2 - \sqrt{3} = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.

Tutki edelleen, onko

- b) $1 - \sqrt{3} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$
 c) $\sqrt{3} - \sqrt{2} = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$.

(Muista, että $b = \sqrt{a}$, jos seuraavat kaksi ehtoa ovat täytetyt: $b^2 = a$ ja b on epänegatiivinen.)

173. Supista lausekkeiden osamäärä.

- a) $\frac{a + b}{a^2 + 2ab + b^2}$
 b) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2}$
 c) $\frac{3x + 9}{x^2 + 6x + 9}$

174. Lukujen a ja b summa on -1 ja tulo -3 . Mikä on lukujen a ja b neliöiden summa?

175. a) Laske $(a + \frac{1}{a})^2$.

b) Käytä a-kohdan tulosta kaavana ja laske ilman laskinta $(6\frac{1}{6})^2$ ja $(9\frac{1}{9})^2$.

c) Erään luvun ja sen käänteisluvun summa on 5. Mikä on saman luvun neliön ja neliön käänteisluvun summa?

176. a) Laske $(a + b)^3$.

b) Käytä a-kohdan tulosta kaavana ja laske $(x + 5)^3$ ja $(t - 1)^3$. Huomaa, että $t - 1 = t + (-1)$.

c) Laske $(a + b)^4$.

d) Käytä c-kohdan tulosta kaavana ja laske $(x + 1)^4$ ja $(x - 2)^4$.

177. Binomin neliön $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ kertoimet 1, 2 ja 1 samoin kuin edellisessä tehtävässä lasketut binomin kuution ja neljännen potenssin kertoimet esiintyvät vaakariveinä niin sanotussa *Pascalin kolmiossa*. Vaakarivit muodostetaan niin, että rivin ensimmäinen ja viimeinen luku on 1 ja rivin jokainen muu luku on kahden yläpuolella olevan luvun summa.

			1		
		1		1	
	1		2		1
1		3		3	
	1		4		6
		6		4	
			1		1

a) Täydennä kolmioon uusia vaakarivejä.

b) Millä kaavalla voidaan laskea binomin viides potenssi $(a + b)^5$?

c) Laske $(x + 1)^5$ ja $(x - 2)^6$.

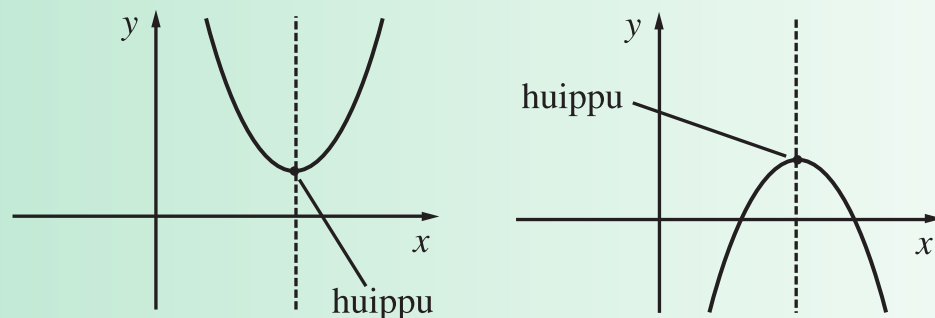
Toisen asteen polynomifunktio ja toisen asteen yhtälö

Ongelma

- a) Piirrä funktioiden x^2 ja $-x^2$ kuvaajat. Millaista symmetriaa havaitset kuvaajissa? Mitä toisen asteen kertoimen merkin vaihtuminen vaikutti kuvaajaan?
- b) Piirrä funktioiden $2x^2 - 4x + 1$ ja $-3x^2 + 6x + 4$ kuvaajat. Käytä graafista laskinta tai laske piirtämistä varten funktioiden arvot pisteissä $-1, 0, 1, 2$ ja 3 . Millaista symmetriaa havaitset kuvaajissa? Miten toisen asteen kertoimen merkki vaikuttaa kuvaajaan?

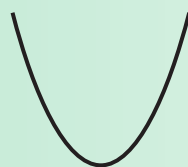
Toisen asteen polynomifunktion kuvaaja

Toisen asteen polynomifunktion $ax^2 + bx + c$, missä $a \neq 0$, kuvaaja on *paraabeli*:



Paraabelilla on *huippu* ja paraabeli on symmetrinen huipun kautta kulkevan y -akselin suuntaisen suoran suhteen.

Paraabelin aukeamissuunnan määrää funktion lausekkeen toisen asteen termin kertoimen merkki. Funktion $ax^2 + bx + c$ kuvaajaparaabeli aukeaa



ylöspäin, jos kerroin
 a on positiivinen ($a > 0$)



alaspäin, jos kerroin
 a on negatiivinen ($a < 0$).

ESIMERKKI 1

Onko funktion kuvaaja paraabeli? Jos kuvaaja on paraabeli, niin aukeako se ylöspäin vai alaspäin?

- a) $f(x) = -x^2 + 6x - 1$
- b) $g(x) = -x^3 - 9x + 4$
- c) $h(x) = -x(1 - 3x)$

Ratkaisu

a) Funktio $f(x) = -x^2 + 6x - 1$ on toisen asteen polynomifunktio, joten funktion kuvaaja on paraabeli. Toisen asteen termin kerroin on -1 . Koska kerroin on negatiivinen, kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

b) Funktion $g(x) = -x^3 - 9x + 4$ ei ole toisen asteen polynomifunktio, joten sen kuvaaja ei ole paraabeli.*

c) Sievennetään funktion h lauseketta.

$$\begin{aligned} h(x) &= -x(1 - 3x) \\ &= -x + 3x^2 \\ &= 3x^2 - x \end{aligned}$$

Funktio h on toisen asteen polynomifunktio, joten funktion kuvaaja on paraabeli. Toisen asteen termin kerroin on 3 . Koska kerroin on positiivinen, kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Vastaus

- a) On, aukeaa alaspäin.
- b) Ei ole.
- c) On, aukeaa ylöspäin.

* Kolmannen asteen polynomifunktioiden kuvaajiin perehdytään kurssissa Derivaatta.

ESIMERKKI 2

Piirrä funktion $f(x) = x^2 + 2x - 4$ kuvaaja. Määritä kuvaajaparaabelin huippu. Vastaa kuvaajan avulla seuraaviin kysymyksiin.

- Kuinka monta juurta on yhtälöllä $x^2 + 2x - 4 = 0$? Mitkä ovat juurten likiarvot?
- Millä muuttujan arvoilla funktion $f(x) = x^2 + 2x - 4$ arvot ovat negatiivisia ja millä muuttujan arvoilla positiivisia?

Ratkaisu

Funktio $f(x) = x^2 + 2x - 4$ on toisen asteen polynomifunktio, ja toisen asteen termin kerroin 1 on positiivinen. Funktion kuvaaja on siis ylöspäin aukeava paraabeli.

Lasketaan aluksi muutama funktion arvo:

$$f(0) = -4$$

$$f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 4 = -1$$

$$f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 4 = 4$$

ja merkitään vastaavat pisteet $(0, -4)$, $(1, -1)$ ja $(2, 4)$ koordinaatistoon.

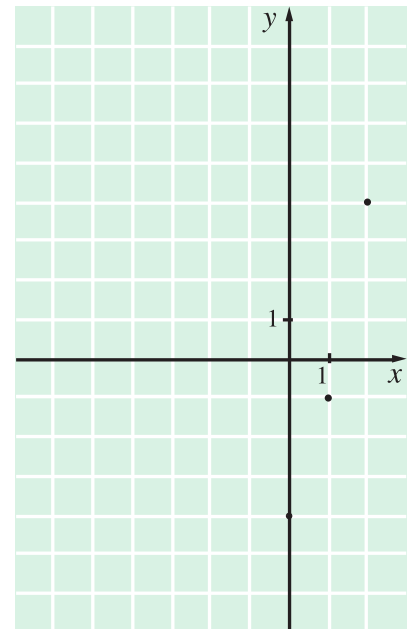
Koska kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, niin lasketuista pisteistä nähdään, että paraabelin huippu on y -akselin vasemmalla puolella. Lasketaan funktion arvoja negatiivisilla muuttujan arvoilla ja merkitään vastaavat kuvaajan pisteet koordinaatistoon.

$$f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 4 = 1 - 2 - 4 = -5$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 4 = 4 - 4 - 4 = -4^*$$

$$f(-3) = (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 4 = 9 - 6 - 4 = -1$$

$$f(-4) = (-4)^2 + 2 \cdot (-4) - 4 = 16 - 8 - 4 = 4$$

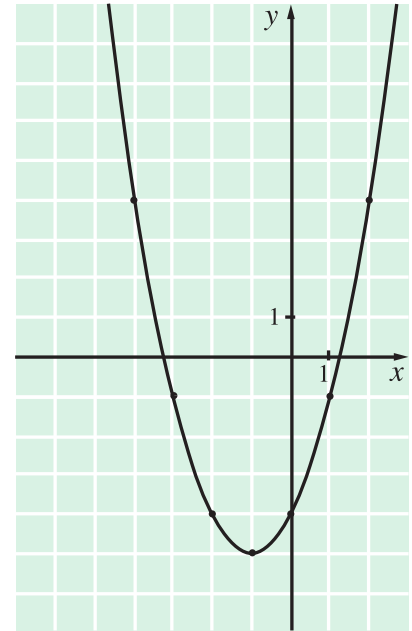


* Nyt ilmaantui paraabelin symmetria, sillä $f(-2) = f(0)$. Symmetrian perusteella on $f(-3) = f(1) = -1$ ja $f(-4) = f(2) = 4$. Arvot $f(-3)$ ja $f(-4)$ on kuitenkin laskettu tarkistuksen vuoksi.

Paraabeli piirretään laskettujen pisteiden avulla.

Paraabelin huippu on pisteessä $(-1, -5)$.

a) Kuvaajan perusteella funktiolla $f(x) = x^2 + 2x - 4$ on kaksi nollakohtaa, eli yhtälöllä $x^2 + 2x - 4 = 0$ on kaksi juurta. Juurten likiarvot ovat $-3,2$ ja $1,2$.



b) Jos funktion arvo on negatiivinen, kuvaajan pisteen y -koordinaatti on negatiivinen ja piste on x -akselin alapuolella. Funktion $f(x) = x^2 + 2x - 4$ kuvaaja on x -akselin alapuolella, kun muuttujan x arvot ovat nollakohtien välissä, siis (likimääräisesti) välillä $]-3,2; 1,2[$ eli kun $-3,2 < x < 1,2$.

Jos funktion arvo on positiivinen, kuvaajan pisteen y -koordinaatti on positiivinen ja piste on x -akselin yläpuolella. Funktion $f(x) = x^2 + 2x - 4$ kuvaaja on x -akselin yläpuolella silloin, kun muuttujan x arvot ovat nollakohdan $-3,2$ vasemmalla puolella tai kun ne ovat nollakohdan $1,2$ oikealla puolella eli kun $x < -3,2$ tai $x > 1,2$.*

Vastaus

Huippu on pisteessä $(-1, -5)$.

a) Kaksi juurta, likimain $-3,2$ ja $1,2$

b) Funktion arvot ovat negatiivisia, kun (likimain) $-3,2 < x < 1,2$.

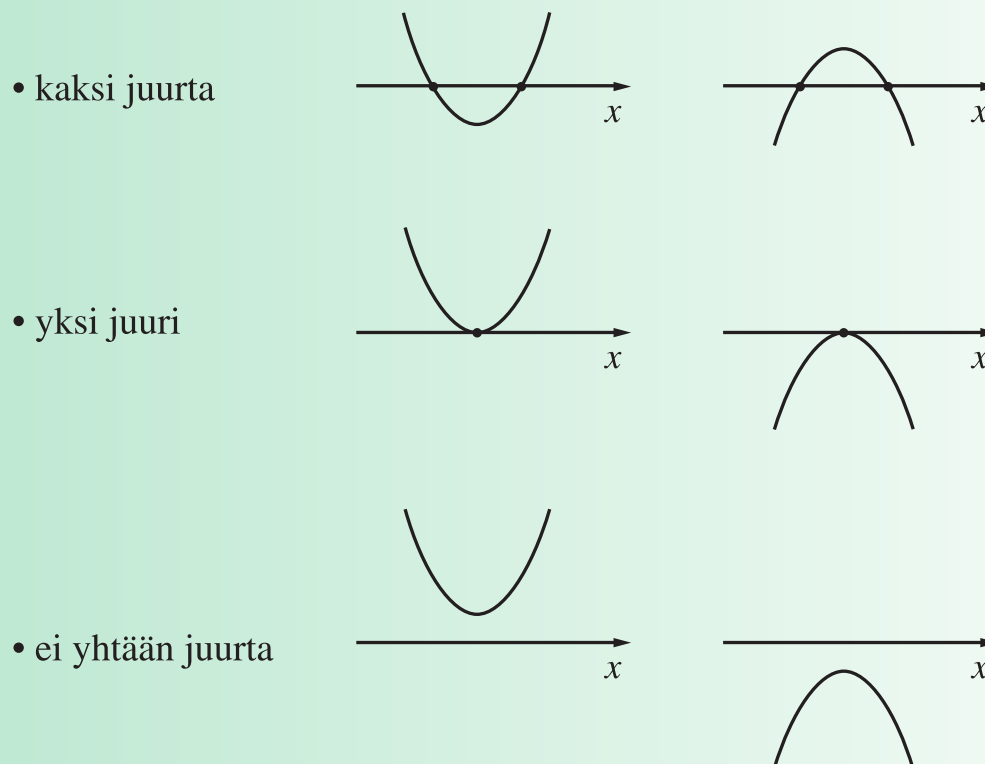
Funktion arvot ovat positiivisia, kun (likimain) $x < -3,2$ tai $x > 1,2$.

* Nämä muuttujan arvot eivät muodosta lukusuoran väliä, joten joukkoa ei voida kuvailla kaksoisepäyhtälöllä tai välin merkinnällä.

Toisen asteen yhtälö

Yhtälö, joka voidaan saattaa muotoon $ax^2 + bx + c = 0$, missä $a \neq 0$, on *toisen asteen yhtälö*.

Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ juuret ovat toisen asteen polynomifunktion $ax^2 + bx + c$ nollakohtia. Koska funktion $ax^2 + bx + c$ kuvaaja on ylös- tai alaspäin aukeava paraabeli, yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ on joko kaksi, yksi tai ei yhtään juurta.



Seuraavassa luvussa opitaan menetelmä, jolla voidaan ratkaista mikä tahansa toisen asteen yhtälö. Kurssissa Funktiot ja yhtälöt on kuitenkin jo opittu ratkaisemaan kaikki sellaiset toisen asteen yhtälöt $ax^2 + bx + c = 0$, joiden ensimmäisen asteen kerroin $b = 0$ eli jotka ovat muotoa $ax^2 + c = 0$. Menetelmä palautetaan mieleen seuraavassa esimerkissä 3, jossa myös havainnollistuvat juurten lukumäärien eri mahdollisuudet.

ESIMERKKI 3

Ratkaise yhtälö.

a) $3x^2 - 21 = 0$ b) $-5x^2 = 0$ c) $5x^2 + 20 = 0$

Ratkaisu

a) $3x^2 - 21 = 0$

$$3x^2 = 21 \quad | : 3$$

$$x^2 = 7$$

$$x = \sqrt{7} \text{ tai } x = -\sqrt{7}$$

Ratkaistaan ensin x^2 .Neliöyhtälön $x^2 = a$, missä $a > 0$, toteuttavat luvun a neliöjuuri ja sen vastaluku.

b) $-5x^2 = 0 \quad | : (-5)$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Neliöyhtälön $x^2 = 0$ ainoa juuri on $x = 0$.

c) $5x^2 + 20 = 0$

$$5x^2 = -20 \quad | : 5$$

$$x^2 = -4$$

Ei juuria.

Neliöyhtälöllä $x^2 = a$, missä $a < 0$, ei ole juuria, sillä luvun neliö ei koskaan ole negatiivinen.

Vastaus

a) $x = \sqrt{7}$ tai $x = -\sqrt{7}$ b) $x = 0$ c) Ei juuria.

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

178. Onko funktion kuvaaja paraabeli? Jos kuvaaja on paraabeli, niin aukeaako se ylöspäin vai alaspäin?

- a) $5x^2 + 25$ b) $-3x + 7$
c) $x^2(1 - x)$ d) $2 + x(1 - 3x)$

179. Piirrä funktion $f(x) = -x^2 + 4x - 2$ kuvaaja. Määritä kuvaajaparaabelin huippu. Vastaa kuvaajan avulla seuraaviin kysymyksiin.

- a) Kuinka monta juurta on yhtälöllä $-x^2 + 4x - 2 = 0$? Mitkä ovat juurten likiarvot?
b) Millä muuttujan arvoilla funktion $f(x) = -x^2 + 4x - 2$ arvot ovat negatiivisia ja millä muuttujan arvoilla positiivisia?

180. Piirrä funktion $f(x) = x^2 + 2x + 3$ kuvaaja. Määritä kuvaajaparaabelin huippu. Vastaa kuvaajan avulla seuraaviin kysymyksiin.

- a) Kuinka monta juurta on yhtälöllä $x^2 + 2x + 3 = 0$? Mitkä ovat juurten likiarvot?
b) Millä muuttujan arvoilla funktion $f(x) = x^2 + 2x + 3$ arvot ovat negatiivisia ja millä muuttujan arvoilla positiivisia?

181. Ratkaise toisen asteen yhtälö.

- a) $x^2 = 36$ b) $3x^2 - 36 = 0$
c) $-3x^2 = 0$ d) $2x^2 + 18 = 0$
e) $x^2 = 5x^2$

182. Ratkaise yhtälö.

- a) $(x - 3)^2 = 25 - 6x$
b) $(2x + 5)(2x - 5) = -22$

183. Millä muuttujan t arvoilla funktioiden $f(t) = 4t^2 - t - 5$ ja $g(t) = t^2 - t + 7$ arvot ovat yhtä suuret? Mitkä ovat nämä yhtä suuret funktioiden arvot?

184. Anna vakiolle d jokin sellainen arvo, että toisen asteen yhtälöllä $x^2 + 3 = d$ on

- a) kaksi juurta
b) yksi juuri
c) ei yhtään juurta.

Ratkaise a- ja b-kohdissa muodostamasi yhtälöt.

185. Piirrä graafisella laskimella funktion $0,3x^2 - 2,1x - 1$ kuvaaja. Vastaa seuraaviin kysymyksiin kuvaajan avulla. Käytä tarvittaessa laskimen jäljitustoimintoa (trace).

- a) Missä pisteessä on kuvaajaparaabelin huippu?
b) Mitkä ovat yhtälön $0,3x^2 - 2,1x - 1 = 0$ juuret?
c) Millä muuttujan arvoilla on $0,3x^2 - 2,1x - 1 < 0$ ja millä muuttujan arvoilla on $0,3x^2 - 2,1x - 1 > 0$?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

186. Piirrä funktion $f(x) = x^2 - 2x + 1$ kuvaaja. Määritä kuvaajaparaabelin huippu. Vastaa kuvaajan avulla seuraaviin kysymyksiin.

- a) Kuinka monta juurta on yhtälöllä $x^2 - 2x + 1 = 0$? Mitkä yhtälön juuret ovat?
b) Millä muuttujan arvoilla funktion $f(x) = x^2 - 2x + 1$ arvot ovat negatiivisia ja millä muuttujan arvoilla positiivisia?

187. Piirrä funktion $f(x) = -x^2 + 3x + 3$ kuvaaja. Päätele symmetrian avulla huipun x -koordinaatti. Laske huipun y -koordinaatti. Vastaa kuvaajan avulla seuraaviin kysymyksiin.

- a) Kuinka monta juurta on yhtälöllä $-x^2 + 3x + 3 = 0$? Mitkä ovat juurten likiarvot?
b) Millä muuttujan arvoilla funktion $f(x) = -x^2 + 3x + 3$ arvot ovat negatiivisia ja millä muuttujan arvoilla positiivisia?

188. Määritä funktion nollakohdat.

a) $f(x) = 4x^2 - 9$ b) $g(t) = 1 + 2t^2$

189. Ratkaise yhtälö.

a) $2(x^2 - 8) = 0$ b) $(x - 4)^2 = 17 - 8x$

c) $(x^2 - 3)^2 = x^4 - 3$

190. Millä vakion k arvoilla toisen asteen yhtälöllä $x^2 + k = 4$ on

a) kaksi juurta b) yksi juuri

c) ei yhtään juurta?

191. a) Millä muuttujan x arvoilla funktioiden $f(x) = x^2 + 2x - 3$ ja $g(x) = 2x + 1$ arvot ovat yhtä suuret? Mitkä ovat nämä yhtä suuret funktioiden arvot?

b) Piirrä a-kohdan funktioiden $f(x)$ ja $g(x)$ kuvaajat samaan koordinaatistoon. Päätele kuvaajista, millä muuttujan x arvoilla on $f(x) > g(x)$ ja millä muuttujan x arvoilla on $f(x) < g(x)$.

192. Piirrä graafisella laskimella funktion $-0,5x^2 + 3,2x - 7$ kuvaaja. Vastaa seuraaviin kysymyksiin kuvaajan avulla.

a) Missä pisteessä on kuvaajaparaabelin huippu?

b) Mitkä ovat yhtälön $-0,5x^2 + 3,2x - 7 = 0$ juuret?

c) Millä muuttujan arvoilla on $-0,5x^2 + 3,2x - 7 < 0$ ja millä muuttujan arvoilla on $-0,5x^2 + 3,2x - 7 > 0$?

Seuraavissa tehtävissä 193–202 opitaan ratkaisemaan toisen asteen yhtälöitä menetelmällä, jota kutsutaan *neliöksi täydentämiseksi*. Menetelmällä voidaan ratkaista kaikki toisen asteen yhtälöt. Menetelmän oppiminen ei ole välttämätöntä, sillä seuraavassa luvussa opitaan ratkaisemaan toisen asteen yhtälöt ratkaisukaavan avulla.

Tehtävien tavoitteena on, että ensin opitaan ratkaisemaan toisen asteen yhtälö, joka on muotoa $(ux + v)^2 = w$, ja sitten opitaan saattamaan toisen asteen yhtälö tällaiseen muotoon.

193. a) Ratkaise yhtälö $x^2 = 9$

b) Ratkaise yhtälö $(x - 4)^2 = 9$. (Ohje: Mikä tulee olla lausekkeen $x - 4$ arvon, jotta yhtälö toteutuisi?)

194. Ratkaise yhtälö.

a) $x^2 = 7$

b) $(x - 2)^2 = 7$

c) $(x + 1)^2 = 16$

195. Ratkaise yhtälö.

a) $(x - 5)^2 = 1$

b) $(x - 5)^2 = 0$

c) $(x - 5)^2 = -2$

196. Ratkaise yhtälö.

a) $(3x + 1)^2 = 4$

b) $(2x - 1)^2 = 5$

Nyt siirrytään toiseen tavoitteeseen.

197. Tunnista yhtälön vasemmalla puolella binomin neliö ja ratkaise yhtälö.

- a) $x^2 + 6x + 9 = 25$
- b) $x^2 - 2x + 1 = 2$
- c) $x^2 - 4x + 4 = 0$
- d) $4x^2 + 4x + 1 = 16$

198. Lisää yhtälön molemmille puolille sellainen luku, että vasemmalle puolelle tulee binomin neliö, ja ratkaise yhtälö.

- a) $x^2 + 6x = -5$
- b) $x^2 - 2x = 4$
- c) $x^2 + 4x = 3$
- d) $4x^2 - 4x = 1$

Siirrä seuraavissa yhtälöissä ensin vakiotermi oikealle puolelle ja menettele sitten kuten edellisessä tehtävässä. Nyt osaat ratkaista toisen asteen yhtälöitä neliöksi täydentämällä.

199. Ratkaise yhtälö.

- a) $x^2 - 6x - 7 = 0$
- b) $x^2 + 4x - 5 = 0$
- c) $x^2 - 8x + 13 = 0$

200. Ratkaise yhtälö.

- a) $x^2 - 2x - 1 = 0$
- b) $x^2 - 2x + 3 = 0$
- c) $x^2 + 20x - 69 = 0$

201. Ratkaise yhtälö.

- a) $4x^2 - 4x - 6 = 0$
- b) $9x^2 + 6x - 15 = 0$

202. Ratkaise yhtälö.

- a) $x^2 - 3x - 4 = 0$
- b) $x^2 + x - 1 = 0$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava

Kaavan johto

Jokainen toisen asteen yhtälö voidaan ratkaista neliöksi täydentämällä (katso edellisen luvun tehtävät 193 – 202). Ratkaistaan neliöksi täydentämällä yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$. Näin saadaan kaava, jolla voidaan ratkaista kaikki toisen asteen yhtälöt.

Neliöksi täydentäminen tulee yksinkertaisemmaksi, kun yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$ ensin kerrotaan luvulla $4a$.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad | \cdot 4a \neq 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Tavoitteena on saada yhtälö muotoon $(ux + v)^2 = w$. Aloitetaan siirtämällä vakiotermi oikealle puolelle.

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Vasen puoli pitää täydentää binomin neliöksi. Toisen asteen termi $4a^2x^2$ on monomin $2ax$ neliö.

$$(2ax)^2 + 4abx = -4ac$$

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b = -4ac \quad | + b^2$$

Vasemmalla puolella on monomin $2ax$ neliö lisättynä monomien $2ax$ ja b kaksinkertaisella tulolla. Lisätään yhtälön molemmille puolille b :n neliö.

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 = b^2 - 4ac$$

Vasen puoli on binomin $2ax + b$ neliö.

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Neliöksi täydentäminen on suoritettu. Yhtälö toteutuu, kun $2ax + b$ on oikean puolen neliöjuuri tai neliöjuuren vastaluku.

$$2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{tai} \quad 2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Ratkaistaan
yhtälöistä x .

$$2ax = -b + \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{tai} \quad 2ax = -b - \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$ toteutuu, kun

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Juurten lausekkeet voidaan yhdistää $\pm$ -merkinnällä, jolloin saadaan:

Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisukaava

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Kaavaa sovellettaessa saattaa juurimerkin alle tulla negatiivinen luku. Tällöin yhtälöllä ei ole juuria. Jos juurimerkin alle tulee nolla, juuria on yksi. Jos juurimerkin alle tulee positiivinen luku, juuria on kaksi.

ESIMERKKI 1

Ratkaise yhtälö $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

Ratkaisu

Yhtälön $3x^2 - 5x - 2 = 0$ kertoimet ovat $a = 3$, $b = -5$ ja $c = -2$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sijoitetaan ratkaisukaavaan

$$a = 3, \quad b = -5 \quad \text{ja} \quad c = -2.$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3}$$

Merkintä $-b$ tarkoittaa luvun b vastalukua.

Luvun -5 vastaluku on 5 .

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$$

Siis yhtälö toteutuu, kun

$$x = \frac{5+7}{6} = \frac{12}{6} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{5-7}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Vastaus

$$x = 2 \quad \text{tai} \quad x = -\frac{1}{3}$$

ESIMERKKI 2

Ratkaise yhtälö $5x^2 + x = 0$.

Ratkaisu

$$5x^2 + x = 0$$

Yhtälön kertoimet ovat $a = 5$, $b = 1$ ja $c = 0$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sijoitetaan $a = 5$, $b = 1$ ja $c = 0$.

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 5 \cdot 0}}{2 \cdot 5}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 0}}{10}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1}}{10}$$

$$= \frac{-1 \pm 1}{10}$$

$$x = \frac{-1 + 1}{10} = \frac{0}{10} = 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1 - 1}{10} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}$$

Vastaus

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = -\frac{1}{5}$$

ESIMERKKI 3

Ratkaise yhtälö $x(4 - x) = -1$.

Ratkaisu

$$x(4 - x) = -1$$

Saatetaan yhtälö muotoon $ax^2 + bx + c = 0$.
Ensin poistetaan sulkeet.

$$4x - x^2 = -1$$

Siirretään termejä niin, että oikealle puolelle tulee nolla.

$$4x - x^2 + 1 = 0$$

Järjestetään termit.

$$-x^2 + 4x + 1 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

Yhtälön kerrotaan luvulla -1 , jolloin toisen asteen kerroin tulee positiiviseksi. Juurten sieventäminen on tällöin yksinkertaisempaa (nimittäjä $2a$ on positiivinen).

$$x^2 - 4x - 1 = 0$$

Kertoimet ovat $a = 1$, $b = -4$ ja $c = -1$.

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$x = \frac{4 + \sqrt{20}}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{4 - \sqrt{20}}{2}$$

Juuria voidaan vielä sieventää, sillä $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

$$x = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2}$$

Osoittajat voidaan saattaa tulomuotoon, minkä jälkeen voidaan supistaa.

$$x = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}(2 + \sqrt{5})}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 2 + \sqrt{5} \quad \text{tai} \quad x = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}(2 - \sqrt{5})}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 2 - \sqrt{5}$$

Vastaus

$$x = 2 + \sqrt{5} \quad \text{tai} \quad x = 2 - \sqrt{5}$$

ESIMERKKI 4

Ratkaise yhtälö $\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} = 4$.

Ratkaisu

Koska nolllalla ei voi jakaa, yhtälö ei ole määritelty, kun $x = 0$. Yhtälöllä on määrittelyehto $x \neq 0$.

$$\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} = 4 \quad | \cdot x^2 \neq 0 \quad \text{Poistetaan nimittäjät.}$$

$$\frac{\overset{1}{\cancel{3x^2}}}{\underset{1}{\cancel{x^2}}} - \frac{\overset{x}{\cancel{x^2}}}{\underset{1}{\cancel{x}}} = 4x^2$$

$$3 - x = 4x^2$$

$$-4x^2 - x + 3 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$4x^2 + x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{8}$$

$$= \frac{-1 \pm 7}{8}$$

$$x = \frac{-1 + 7}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1 - 7}{8} = \frac{-8}{8} = -1.$$

Molemmat juuret täyttävät määrittelyehdon $x \neq 0$.

Vastaus

$$x = \frac{3}{4} \quad \text{tai} \quad x = -1$$

TEHTÄVIÄ

SARJA I.

PERUSTEHTÄVIÄ

203. Ratkaise yhtälö.

a) $x^2 + x - 6 = 0$ b) $2x^2 - x - 1 = 0$

204. Ratkaise yhtälö.

a) $3x^2 + 4x = 0$ b) $s(7 - 3s) = 2$

205. Ratkaise yhtälö.

a) $4y^2 - 12y = -9$ b) $3x^2 + 1 = -2x$

206. Ratkaise yhtälö.

a) $y^2 + 2y - 4 = 0$ b) $3x(2 - x) = 1$

207. Tiina huomasi, että hänen syntymävuotensa 1980 on kahden peräkkäisen luonnollisen luvun tulo. Mitkä ovat nämä luvut? Mikä on seuraava yhtä hyvä vuosi?**208.** Jos yhtälössä on murtolukukertoimia, nimittäjät kannattaa ensin poistaa kertomalla yhtälö sopivalla luvulla. Ratkaise yhtälö.

a) $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{9} = 0$

b) $\frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4} = 0$

209. Jos yhtälön kertoimilla on yhteinen tekijä, yhtälöä voi yksinkertaistaa jakamalla yhtälön molemmat puolet tällä tekijällä. Ratkaise yhtälö.

a) $50y^2 - 200y + 50 = 0$

b) $10x^2 - 90x + 300 = 0$

210. Ratkaise yhtälö.

a) $1 + \frac{1}{y} = \frac{6}{y^2}$ b) $\frac{72}{x} = x - 1$

211. Ratkaise yhtälö.

a) $\frac{x-4}{9} = \frac{x}{x-4}$ b) $\frac{2}{x+1} = \frac{2x+3}{3}$

212. Ratkaise.

a) $(x-3)^2 = 25$ b) $(3x+1)^2 = 0$

213. Ratkaise.

a) $(2x-1)^2 = (3x+2)^2$

b) $(1-4x)^2 = 9x^2$

214. Ratkaise yhtälö $(x^2 + x + 1)^2 = (2x + 1)^2$. (Ohje: Milloin kahden luvun neliöt ovat yhtä suuret?)**215.** Millä vakion a arvolla luku 5 on yhtälön $(x+3)(x+a) = 24$ juuri? Mikä tällöin on yhtälön toinen juuri?

SARJA II.

PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

216. Ratkaise.

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$

b) $3x^2 + 7x - 6 = 0$

217. Määritä funktion nollakohdat.

a) $f(t) = t^2 + 8t + 15$

b) $u(x) = 2x^2 - x + 1$

218. Ratkaise.

a) $(1+3x)(1-3x) = 8x$

b) $(2x-1)^2 = 3x^2$

219. Millä muuttujan x arvoilla funktion $x^2 - 6x$ arvo on

a) 0

b) -9?

220. Millä muuttujan x arvoilla funktioiden $P(x) = 2x^2 + x$ ja $Q(x) = 3x^2 + 4x - 2$ arvot ovat yhtä suuret?

221. Ratkaise.

a) $x^2 - \frac{5}{12}x - \frac{1}{4} = 0$

b) $1 - \frac{x^2 + 1}{6} = -\frac{x}{3}$

222. Ratkaise.

a) $1 + \frac{12}{x^2} = \frac{8}{x}$

b) $\frac{x^2}{x-1} = \frac{9}{2}$

223. Luvun ja luvun käänteisluvun erotus on yksi. Mikä luku on kyseessä?

224. Ratkaise.

a) $(5x + 4)^2 = 36$

b) $(x + 6)^2 = -3$

c) $(3x - 2)^2 = (x - 5)^2$

225. Ratkaise yhtälö

$$(x^2 - 3x - 17)^2 = (x^2 - x - 13)^2.$$

226. Onko tässä kirjassa sellainen aukeama, jonka sivunumeroiden neliöiden summa on 11 101?

227. Millä muuttujan x arvoilla funktioiden $x - 1$ ja $x - 3$ arvot ovat toistensa käänteislukuja?

228. Kuun pinnalta ammutaan suoraan ylöspäin pieni tutkimusraketti lähtönopeudella 160 m/s. Kun lähdöstä on kulunut t sekuntia, raketti on korkeudella $160t - 0,8t^2$ (metriä).

Kuinka pitkän ajan kuluttua raketti on

a) 4 000 metrin

b) 8 000 metrin korkeudella?

c) Kuinka pitkän ajan kuluttua raketti palaa kuun pinnalle?

229. Ratkaise.

a) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$

b) $2\sqrt{3}x^2 - 5x - \sqrt{3} = 0$

230. Määritä kaksinumeroinen luonnollinen luku, jonka neliö saadaan kirjoittamalla luvun eteen numerot 5 ja 7. (Kyseinen luku on luvun 25 ohella ainoa kaksinumeroinen luku, jonka neliö päättyy itse lukuun.)

231. Määritä vakio a niin, että funktiolla $f(x) = (x + a)(x - 2)$ on nollakohta -1 .

Millä muuttujan arvoilla funktio f saa tällöin arvon 1?

232. Millä vakion a arvoilla $x = -1$ on yhtälön $ax^2 + (a^2 - 1)x + 1 = 0$ juuri? Mikä on tällöin yhtälön toinen juuri?

233. Osoita, että vakion a arvosta riippumatta luku -1 toteuttaa yhtälön

$$x^2 + (a^2 + 1)x + a^2 = 0.$$

Millä vakion a arvoilla yhtälön toinen juuri on -5 ?

234. Ratkaise yhtälöstä x .

a) $x^2 + ax + a - 1 = 0$

b) $x^2 + ax - x - a = 0$

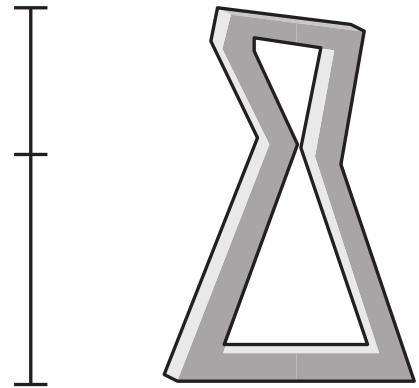
Sovelluksia

ESIMERKKI 1

Kuvataiteessa, arkkitehtuurissa ja musiikissa on antiikin ajoista lähtien käytetty paljon ns. *kultaista leikkausta* (*sectio aurea*). Kultainen leikkaus on tietty tapa jakaa jana (patsaan tai pylvään korkeus, sävellyksen kesto tms.) kahteen osaan.

Kultainen leikkaus tarkoittaa sellaista jakoa, että janan lyhyemmän osan suhde pitempään osaan on yhtä suuri kuin pitemmän osan suhde koko janaan

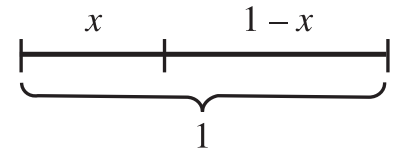
a) Jana, jonka pituus on 1, jaetaan kultaisen leikkauksen suhteessa. Laske osien pituuksien likiarvot kolmen desimaalin tarkkuudella.



b) Antiikin kauneusihanteen mukaan ihmisen navan tulee jakaa ihmisen pituus kultaisen leikkauksen suhteessa. Millä korkeudella 173 cm pitkän henkilön navan tulisi olla?

Ratkaisu

a) Janan lyhyempi osa valitaan tuntemattomaksi x .



Lyhyemmän osan suhde pitempään on yhtä suuri kuin pitemmän suhde koko janaan.

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{1} \quad \text{Ratkaistaan yhtälö. Kerrotaan ristiin.}$$

$$(1-x)^2 = x$$

$$1 - 2x + x^2 = x$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Lasketaan juurten likiarvot.

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2,618.$$

Jako-osan pituus ei voi olla suurempi kuin janan pituus 1. Juuri ei kelpaa ongelman ratkaisuksi.

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0,382. \text{ Juuri kelpaa.}$$

Pitempi jako-osa on $1 - x \approx 1 - 0,382 = 0,618$.

Osien pituudet ovat 0,382 ja 0,618 eli 38,2 % ja 61,8 % janan pituudesta.

b) Jos 173 senttimetrin pituus jaetaan kahteen osaan kultaisen leikkauksen suhteessa, niin pitempi osa on 61,8 % pituudesta.

$$0,618 \cdot 173 \text{ cm} \approx 107 \text{ cm}$$

Vastaus

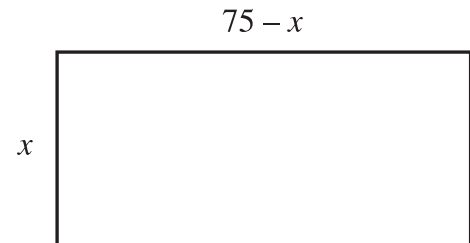
a) 0,382 ja 0,618 b) 107 cm

ESIMERKKI 2

Köydellä, jonka pituus on 150 m, on rajattava suorakulmion muotoinen alue. Alueen pinta-alan halutaan olevan $1\,400\text{ m}^2$. Mitkä ovat alueen mitat?

Ratkaisu

Suorakulmion piiri on 150 m. Pituuden ja leveyden summa on puolet piiristä eli 75 m. Jos toinen näistä on x (m), niin toinen on $75 - x$.



$$x(75 - x) = 1400$$

Suorakulmion pinta-ala on $1\,400\text{ m}^2$.

$$75x - x^2 = 1400$$

$$-x^2 + 75x - 1400 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2 - 75x + 1400 = 0$$

$$x = \frac{75 \pm \sqrt{(-75)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1400}}{2 \cdot 1} = \frac{75 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{75 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{75 + 5}{2} = 40 \quad \text{tai} \quad x = \frac{75 - 5}{2} = 35$$

Molemmat juuret kelpaavat aitauksen sivun pituudeksi.

Jos sivu x on 40 (m), niin toinen sivu on $75 - x = 75 - 40 = 35$ (m).

Jos sivu x on 35 (m), niin toinen sivu on $75 - x = 75 - 35 = 40$ (m).

Molemmat juuret johtavat samoihin suorakulmion mittoihin. Vaikka yhtälöllä oli kaksi juurta, niin ongelmalla on vain yksi ratkaisu.

Vastaus

Alueen sivut ovat 40 m ja 35 m.

ESIMERKKI 3

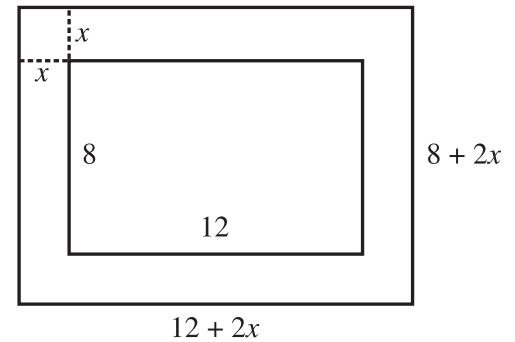
Maalaus, jonka leveys on 120 cm ja korkeus 80 cm, halutaan kehystää kullatuin kehyksin. Lehtikultaa riittää $0,70 \text{ m}^2$:n kultaamiseen. Kuinka leveät kehykset voivat korkeintaan olla? Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.

Ratkaisu

Valitaan käytettäväksi yksiköksi desimetri: $120 \text{ cm} = 12 \text{ dm}$,
 $80 \text{ cm} = 8 \text{ dm}$, $0,70 \text{ m}^2 = 70 \text{ dm}^2$.

Olkoon kehyksen suurin mahdollinen leveys x (dm).

Kehyksen pinta-ala saadaan, kun kehystetyn taulun pinta-alasta $(12 + 2x)(8 + 2x)$ vähennetään maalauksen pinta-ala $8 \cdot 12$.



$$(12 + 2x)(8 + 2x) - 8 \cdot 12 = 70$$

Kehyksen pinta-ala on 70 dm^2 .

$$4x^2 + 40x + 96 - 96 = 70$$

$$4x^2 + 40x - 70 = 0 \quad | : 2$$

$$2x^2 + 20x - 35 = 0$$

$$x = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-35)}}{2 \cdot 2} = \frac{-20 \pm \sqrt{680}}{4}$$

$$x = \frac{-20 + \sqrt{680}}{4} \approx 1,5 \text{ tai } x = \frac{-20 - \sqrt{680}}{4} \approx -11,5$$

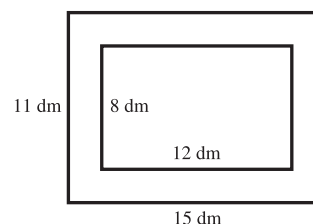
Leveys ei voi olla negatiivinen, joten vain positiivinen juuri kelpaa. Siis $x \approx 1,5$ eli kehyksen suurin mahdollinen leveys on $1,5 \text{ dm} = 15 \text{ cm}$.*

Vastaus

15 cm

* Tulos kannattaa tarkistaa.

$$15 \cdot 11 - 12 \cdot 8 = 69 \approx 70$$



TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

235. Taulun leveys on 1,00 m. Määritä taulun korkeus niin, että korkeuden suhde leveyteen on yhtä suuri kuin leveyden suhde korkeuden ja leveyden summaan.

236. Suorakulmion muotoista kenttää kiertävän aidan pituus on 160 m. Kentän pinta-ala on $1\,500\text{ m}^2$. Mitkä ovat kentän mitat?

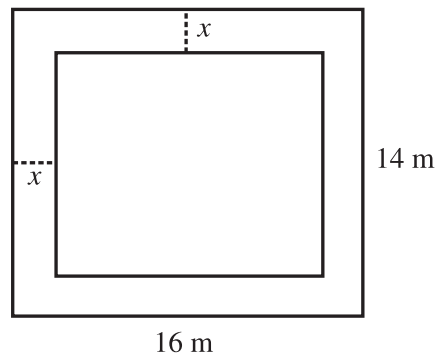
237. Suorakulmion muotoisen kasvimaan pituus on 4,0 m suurempi kuin leveys. Kasvimaan pinta-ala on 117 m^2 . Kuinka monta metriä aitaa tarvitaan kasvimaan aitaamiseen?

238. Neliön muotoisilla laatoilla tehtyyn neliön muotoiseen pihalaatoitukseen päätettiin vielä lisätä kaksi laattariviä yhteen suuntaan ja neljä laattariviä toiseen suuntaan. Koko suorakulmion muotoiseen laatoitukseen tarvittiin 99 laattaa. Mikä määrä laattoja olisi riittänyt alkuperäiseen neliön muotoiseen laatoitukseen?

239. Mainostaulu on 7,0 m leveä ja 5,0 m korkea. Taulun pinta-alaa halutaan lisätä 64 m^2 kasvattamalla leveyttä ja korkeutta yhtä paljon. Kuinka paljon?

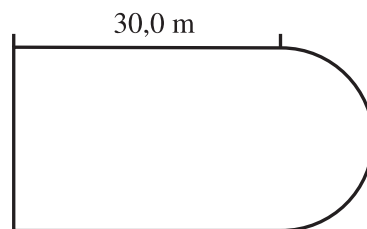
240. Kahden kadun risteyksessä sijaitsevan suorakulmion muotoisen tontin sivut ovat 27 m ja 36 m. Katujen levenämisen takia tontista menetetään kummankin kadun puolelta yhtä leveät kaistaleet. Tällöin tontin pinta-ala vähenee puoleen. Kuinka leveät kaistaleet tontista menetetään?

241. Jotta kuvion mukaisella rakennuksen betonisella kivijalalla olisi riittävä kantavuus, kivijalan pinta-ala tulee olla 37 m^2 . Kuinka suuri tulee kivijalan leveyden x olla?



242. Aidatun asfalttikentän kustannuksiksi arvioidaan 45 €/m^2 (kenttä) ja 15 €/m (aita). Kuinka suuren neliön muotoisen kentän saa 10 000 eurolla?

243. Konserttisalin pohja muodostuu 30,0 m pitkästä suorakulmiosta ja suorakulmion toiseen päähän liittyvästä puoliympyrästä. Kuinka leveä salin tulee olla, jotta lattiapinta-ala olisi 800 m^2 ? Ympyrän pinta-ala on πr^2 , missä r on ympyrän säde.



SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

244. Tasakylkisen kolmion kannan pituus on 1,00 m. Määritä kolmion kyljen pituus niin, että kannan pituuden suhde kyljen pituuteen on yhtä suuri kuin kyljen pituuden suhde kolmion piiriin.

245. Köydellä, jonka pituus on 160 m, on rajattava suorakulmion muotoinen alue, jonka pinta-alaksi halutaan $1\,700\text{ m}^2$. Mitkä ovat alueen mitat?

246. Joen varressa sijaitsevan suorakulmion muotoisen uimaranta-alueen aitaamiseen kolmelta sivulta tarvittiin 114 m aitaa. Alueen pinta-ala on $1\,600\text{ m}^2$. Mitkä ovat alueen mitat?

247. Kodinkoneliike haluaa kaksinkertaistaa lehti-ilmoituksensa pinta-alan lisäämällä ilmoituksen leveyttä ja korkeutta yhtä paljon. Kuinka paljon pitää lisätä, kun ilmoituksen leveys on nyt 4,0 cm ja korkeus 6,0 cm?

248. Neliön muotoisen ikkunaruu-dun viereen tulee samankorkuinen 20 cm leveä tuuletusikkuna. Rakennusmääräysten mukaan ikkunaruu-dun ja tuuletusikkunan yhteenlaskettu pinta-ala saa olla korkeintaan $0,65\text{ m}^2$. Mikä on suurimman sallitun ikkunan korkeus?

249. Rantatontin neliömetrihinta on 25 euroa. Lisäksi jokainen metri rantaviivaa maksaa 200 euroa. Suorakulmion muotoisesta rantatontista, jonka piiri on 180 metriä, jouduttiin maksamaan 58 000 euroa. Laske tontin pinta-ala ja rantaviivan pituus.

250. Terassi laatoitetaan 15:llä $50\text{ cm} \times 50\text{ cm}$ suuruisella neliön muotoisella laattalla, joita tulee suorakulmion muotoiseen asetelmaan kolme vierekkäin ja viisi peräkkäin. Laattojen välit saumataan laastilla, jota riittää $0,50$ neliömetriin saumaa. Kuinka leveäksi laattojen välinen sauma voidaan tehdä?

251. Lammas kytketään aitaamattomalla niityl-lä köydellä 28 m pitkään juoksulankaan. Kuinka pitkä köyden tulee olla, jotta lammas pystyisi syömään ruohoa $1\,500\text{ m}^2$:n alueelta?

252. Tili avattiin vuoden 2003 alussa talletta-malla 800 euroa ja seuraavan vuoden alussa ti-lille talletettiin jälleen 800 euroa. Vuoden 2005 alussa tilillä oli koron lisäämisen jälkeen $1\,784,50$ euroa. Korkoprosentti oli koko ajan sa-ma. Mikä korkoprosentti oli?

253. Auton pysähtymismatka muodostuu mat-kasta, jonka auto kulkee kuljettajan reaktioaika-na, ja varsinaisesta jarrutusmatkasta. Hannu tie-tää reaktioaikansa olevan noin 1,5 sekuntia. Hän oli testannut autonsa jarrutusmatkan kuival-la asfaltilla, jolloin auto pysähtyi 50 km/h no-peudesta 18 metrin matkalla. Millä nopeudella hän korkeintaan voi ajaa kuivalla asfalttitiellä voidakseen pysähtyä

a) 18 metrin

b) 100 metrin matkalla?

Jarrutusmatkan pituus on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön.

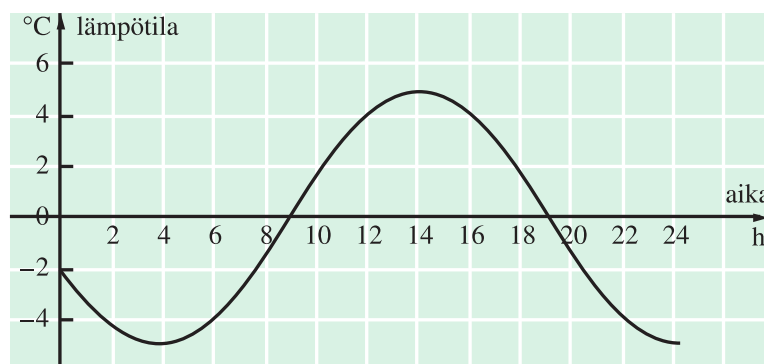
254. Kivi pudotettiin vedenpinnan ylle ulottu-van kallion reunalta. Molskahdus kantautui pu-dottajan korviin 5,2 sekuntia myöhemmin. Kuinka korkea kallio on? Matka, jonka kivi pu-toaa t sekunnissa on $4,9t^2$ metriä. Lämpötila oli $20\text{ }^\circ\text{C}$, jolloin äänen nopeus on noin 340 m/s .

Toisen asteen epäyhtälö

Ongelma 1

Kuviossa on lämpötiläkäyrä erään vuorokauden ajalta. Päätele käyrästä, milloin vuorokauden aikana lämpötila oli

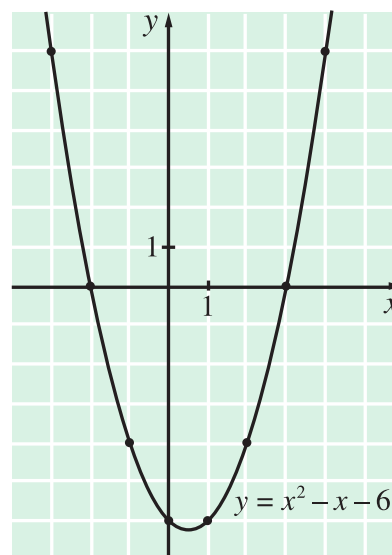
- korkeampi kuin 0°C
- pakkasen puolella.



Ongelma 2

Taulukossa on funktion $f(x) = x^2 - x - 6$ arvoja ja kuviossa on funktion kuvaaja. Millä muuttujan arvoilla funktion $f(x) = x^2 - x - 6$ arvot ovat positiivisia ja millä negatiivisia? Missä kohdissa funktion f arvojen merkki vaihtuu?

x	$f(x) = x^2 - x - 6$	(x, y)
-3	6	$(-3, 6)$
-2	0	$(-2, 0)$
-1	-4	$(-1, -4)$
0	-6	$(0, -6)$
1	-6	$(1, -6)$
2	-4	$(2, -4)$
3	0	$(3, 0)$
4	6	$(4, 6)$



Funktion arvo on muuttujan arvon kohdalla olevan kuvaajan pisteen y -koordinaatti. Piste on y -koordinaatti on positiivinen, kun piste on x -akselin yläpuolella, ja negatiivinen, kun piste on x -akselin alapuolella.

Funktion arvon merkki voidaan siis päätellä funktion kuvaajasta.

Kuvaaja ja funktion arvojen merkki

- Funktion arvot ovat positiivisia niillä muuttujan arvoilla, joiden kohdalla funktion kuvaaja on x -akselin yläpuolella.
- Funktion arvot ovat negatiivisia niillä muuttujan arvoilla, joiden kohdalla funktion kuvaaja on x -akselin alapuolella.

Kuvioon on hahmoteltu ongelman 2 funktion $f(x) = x^2 - x - 6$ kuvaaja. Funktion f arvot ovat positiivisia, kun $x < -2$ tai kun $x > 3$. Funktion f arvot ovat negatiivisia, kun $-2 < x < 3$. Funktion arvojen merkki vaihtuu funktion f nollakohdissa -2 ja 3 .



Funktion $f(x) = x^2 - x - 6$ arvojen merkkien päättelemiseen riittää, että tunnetaan funktion f nollakohdat ja funktion f kuvaajan muoto (ylöspäin aukeava paraabeli).

Jos funktion f kuvaaja on katkeamaton käyrä, niin funktion arvojen merkki voi vaihtua vain kohdissa, joissa funktion kuvaaja leikkaa x -akselin. Nämä kohdat ovat funktion f nollakohtia.

Voidaan osoittaa, että jokaisen polynomifunktion kuvaaja on katkeamaton käyrä.* Siis:

Polynomifunktion nollakohdat ja funktion arvojen merkki

Polynomifunktion arvojen merkki voi vaihtua vain funktion nollakohdissa.

* Tähän polynomifunktioiden ominaisuuteen (niin sanottuun jatkuvuuteen) perehdytään tarkemmin kurssissa Derivaatta. Samassa kurssissa nähdään myös esimerkkejä funktioista, joiden kuvaaja ei ole katkeamaton käyrä.

ESIMERKKI 1

Millä muuttujan arvoilla funktion $f(x) = x^2 + 3x - 4$ arvot ovat positiivisia, eli mitkä muuttujan x arvot toteuttavat epäyhtälön $x^2 + 3x - 4 > 0$?

Ratkaisu

Polynomifunktion arvojen merkki voi vaihtua vain funktion nollakohdissa. Ratkaistaan funktion $f(x) = x^2 + 3x - 4$ nollakohdat.

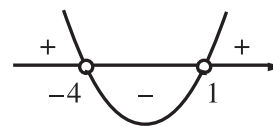
$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{-3 + 5}{2} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-3 - 5}{2} = -4$$

Funktion $f(x) = x^2 + 3x - 4$ nollakohdat ovat -4 ja 1 .

Funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joka leikkaa x -akselin kohdissa -4 ja 1 .



Funktion arvot ovat positiivisia niillä muuttujan arvoilla, joille pätee $x < -4$ tai $x > 1$.

Vastaus

$$x < -4 \quad \text{tai} \quad x > 1$$

Toisen asteen epäyhtälö

Epäyhtälö, joka voidaan saattaa muotoon

$$ax^2 + bx + c < 0, ax^2 + bx + c \leq 0, ax^2 + bx + c > 0 \text{ tai } ax^2 + bx + c \geq 0,$$

missä $a \neq 0$, on *toisen asteen epäyhtälö*.

Toisen asteen epäyhtälön ratkaiseminen

Toisen asteen epäyhtälö ratkaistaan tutkimalla toisen asteen polynomi-funktion merkkiä.

Jos ratkaistavana on esimerkiksi epäyhtälö $ax^2 + bx + c < 0$, niin selvitetään, millä muuttujan arvoilla funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ arvot ovat negatiivisia.

Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ merkin tutkiminen suoritetaan seuraavissa vaiheissa.

- 1° Määritetään funktion f nollakohdat ratkaisemalla toisen asteen yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$.
- 2° Selvitetään funktion f kuvaajaparaabelin aukeamissuunta ja hahmotellaan paraabeli ratkaistujen nollakohtien avulla.
- 3° Päätellään funktion arvojen merkit hahmotellusta kuvaajasta.

ESIMERKKI 2

Ratkaise toisen asteen epäyhtälö $-t^2 + 8t - 15 > 0$.

Ratkaisu

On ratkaistava, millä muuttujan arvoilla funktion $-t^2 + 8t - 15$ arvot ovat positiivisia.

Määritetään funktion $-t^2 + 8t - 15$ nollakohdat.

$$-t^2 + 8t - 15 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

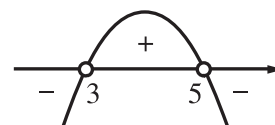
$$t^2 - 8t + 15 = 0$$

$$t = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2}$$

$$t = \frac{8+2}{2} = 5 \text{ tai } t = \frac{8-2}{2} = 3$$

Nollakohdat ovat 3 ja 5.

Funktion $-t^2 + 8t - 15$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



Funktion $-t^2 + 8t - 15$ arvot ovat positiivisia nollakohtien välissä välillä $]3, 5[$. Epäyhtälö $-t^2 + 8t - 15 > 0$ toteutuu niillä muuttujan t arvoilla, joille pätee $3 < t < 5$.

Vastaus

$$3 < t < 5^*$$

* Ratkaisun voi tarkistaa piirtämällä graafisella laskimella kuvaajan $y = -x^2 + 8x - 15$. Ratkaisuvälillä kuvaaja on vaaka-akselin yläpuolella.

ESIMERKKI 3

Ratkaise epäyhtälö $x^2 \geq 9$.

Ratkaisu

$$x^2 \geq 9$$

Siirretään termit vasemmalle puolelle niin, että oikealle puolelle jää 0.

$$x^2 - 9 \geq 0$$

Epäyhtälö on nyt perusmuodossa $ax^2 + bx + c \geq 0$.

Tutkitaan, millä muuttujan arvoilla funktion $x^2 - 9$ arvot ovat positiivisia. Näiden muuttujan arvojen lisäksi epäyhtälö toteutuu funktion $x^2 - 9$ nollakohdissa.

Ratkaistaan nollakohdat.

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \text{ tai } x = -3$$

Nollakohdat ovat -3 ja 3 .

Funktion $x^2 - 9$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Funktion $x^2 - 9$ arvot ovat positiivisia, kun $x < -3$ tai $x > 3$.



Epäyhtälö $x^2 - 9 \geq 0$ toteutuu, kun $x \leq -3$ tai $x \geq 3$.

Vastaus

$$x \leq -3 \text{ tai } x \geq 3$$

ESIMERKKI 4

Ratkaise epäyhtälö $-x^2 + 2x - 3 < 0$.

Ratkaisu

Tutkitaan, millä muuttujan arvoilla funktion $-x^2 + 2x - 3$ arvot ovat negatiivisia.

Ratkaistaan nollakohdat.

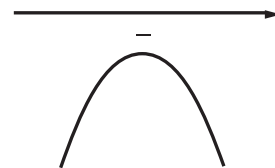
$$-x^2 + 2x - 3 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

Juurrettavaksi tuli negatiivinen luku, joten funktiolla ei ole nollakohtia.

Funktion $-x^2 + 2x - 3$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



Kuvaaja on kokonaan x -akselin alapuolella.

Epäyhtälö $-x^2 + 2x - 3 < 0$ toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla.

Vastaus

Epäyhtälö toteutuu kaikilla muuttujan arvoilla.

ESIMERKKI 5

Ratkaise epäyhtälö $4x^2 + 25 > 20x$.

Ratkaisu

$$4x^2 + 25 > 20x$$

Siirretään termit vasemmalle puolelle niin, että oikealle puolelle jää 0.

$$4x^2 - 20x + 25 > 0$$

Tutkitaan, millä muuttujan arvoilla funktion $4x^2 - 20x + 25$ arvot ovat positiivisia.

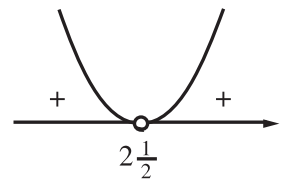
Ratkaistaan nollakohdat.

$$4x^2 - 20x + 25 = 0$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25}}{2 \cdot 4} = \frac{20 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

Funktiolla on yksi nollakohta $2\frac{1}{2}$.

Funktion $4x^2 - 20x + 25$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Funktion $4x^2 - 20x + 25$ arvot ovat positiivisia, kun $x \neq 2\frac{1}{2}$.

Vastaus

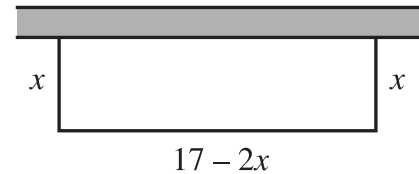
$$x \neq 2\frac{1}{2}$$

ESIMERKKI 6

Kanalan seinän viereen rakennetaan suorakulmion muotoinen kanojen jaloittelualue, jonka kolmeen sivuun käytetään 17 metriä verkkoaitaa. Kuinka seinää vastaan kohtisuoran sivun pituus on valittava, jotta aitauksen pinta-ala olisi vähintään 35 m^2 ?

Ratkaisu

Jos seinää vastaan kohtisuoran sivun pituus on x metriä, niin seinän suuntaisen sivun pituus on $17 - 2x$ metriä ja aitauksen pinta-ala on $x(17 - 2x)$ neliömetriä.



Saadaan epäyhtälö.

$$x(17 - 2x) \geq 35$$

$$17x - 2x^2 \geq 35$$

$$-2x^2 + 17x - 35 \geq 0$$

Tutkitaan, millä muuttujan arvoilla funktion $-2x^2 + 17x - 35$ arvot ovat positiivisia. Näiden muuttujan arvojen lisäksi epäyhtälö toteutuu funktion nollakohdissa.

Ratkaistaan nollakohdat.

$$-2x^2 + 17x - 35 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

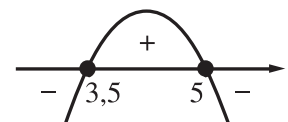
$$2x^2 - 17x + 35 = 0$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 35}}{2 \cdot 2} = \frac{17 \pm 3}{4}$$

$$x = \frac{17 + 3}{4} = 5 \quad \text{tai} \quad x = \frac{17 - 3}{4} = 3,5$$

Nollakohdat ovat 3,5 ja 5.

Funktion $-2x^2 + 17x - 35$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $-2x^2 + 17x - 35 \geq 0$ toteutuu, kun $3,5 \leq x \leq 5$.

Vastaus

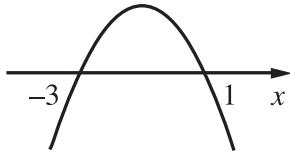
vähintään 3,5 m ja enintään 5 m

TEHTÄVIÄ

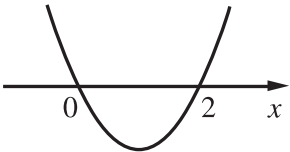
SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

255. Kuviossa on hahmoteltuna erään toisen asteen polynomifunktion kuvaaja. Kuvioon on merkitty myös funktion nollakohdat. Millä muuttujan arvoilla funktion arvot ovat positiivisia?

a)



b)



256. Millä muuttujan arvoilla funktion $f(x) = x^2 + 5x - 6$ arvot ovat positiivisia?

257. Millä muuttujan arvoilla funktion arvot ovat negatiivisia?

a) $x^2 - 16$ b) $-x^2 + 5x - 6$

258. Ratkaise epäyhtälö.

a) $-x^2 - x + 12 < 0$

b) $x^2 < -x$

259. Ratkaise epäyhtälö.

a) $x^2 < 25$ b) $x^2 \geq 36$

c) $x^2 > -4$

260. Ratkaise epäyhtälö.

a) $x(3 - 2x) \geq 1$

b) $x^2 + 3 > x$

261. Ratkaise epäyhtälö.

a) $x^2 + 6x + 9 > 0$

b) $-x^2 + 10x - 25 > 0$

262. Osoita, että funktion $g(x) = -2x^2 + 4x - 3$ kaikki arvot ovat negatiivisia.

263. Ratkaise epäyhtälö.

a) $(x - 3)^2 > 16$

b) $(x - 1)^2 > (2x + 3)^2$

264. Suorakulmion muotoisen alueen aitaamiseen käytetään 50 metriä köyttä. Kuinka aitauksen leveys on valittava, jotta aitauksen pinta-ala olisi vähintään 100 neliömetriä?

265. Suorakulmion muotoista mainostaulua kiertävän kehikon rakentamiseen käytetään 16 metriä rimaa. Maali riittää korkeintaan 15 m^2 :n suuruisen taulun maalaamiseen. Kuinka taulun korkeus on valittava?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

266. Millä muuttujan arvoilla funktion

$f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ arvot ovat

a) yhtä suuria kuin 0

b) negatiivisia

c) positiivisia?

267. Ratkaise epäyhtälö.

a) $-3x^2 + 2x + 1 > 0$

b) $-3x + 1 > 0$

268. Ratkaise epäyhtälö.

a) $x^2 \leq 3$

b) $9x^2 > 49$

c) $x^2 > x$

269. Ratkaise epäyhtälö.

- a) $4x^2 + 9 \leq 12x$
 b) $9x^2 + 4 > 12x$

270. Osoita, että funktion $f(x) = x^2 - 10x + 34$ arvo on kaikilla muuttujan arvoilla suurempi kuin funktion $g(x) = x + 3$ arvo.

271. Ratkaise epäyhtälö.

- a) $(1 - x)^2 > (1 - x)(1 + x)$
 b) $x^2 > (1 - 3x)^2$

272. Ratkaise.

- a) $\frac{x}{2} - \frac{x^2 + 1}{5} > 0$
 b) $2x - \frac{x^2 + 3}{2} \leq 0$

273. Mikä on funktion määrittelyjoukko?

- a) $\sqrt{25 - x^2}$ b) $\sqrt{x^2 - 5}$

274. Osoita, että funktio $f(x) = x^2 + 2x - 119$ saa pelkästään positiivisia arvoja välillä $]-\infty, -12]$.

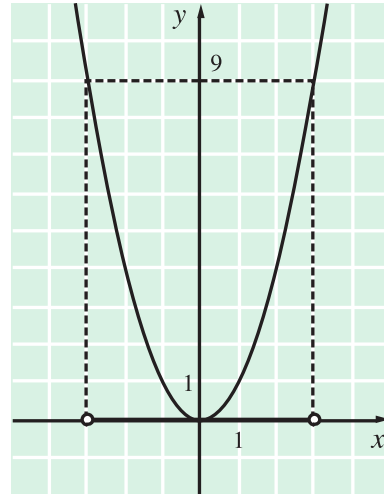
275. Joen rantaan pystytettävän suorakulmion muotoisen aitauksen kolmeen sivuun on käytettävissä 50 metriä köyttä. Kuinka pitkä jokea vastaan kohtisuoran sivun on oltava, jotta aitauksen pinta-ala olisi yli 300 m^2 ?

276. Betoniharkkoista rakennetaan suorakulmion muotoinen kivijalka, jonka piiri on 36 m. Luku- ja laskelmien perusteella tiedetään, että kivijalka kannattaa rakennuksen, jonka pohjapinta-ala on korkeintaan 65 m^2 . Kuinka rakennuksen leveys on valittava?

277. Mitkä kokonaisluvut toteuttavat epäyhtälön $5x^2 - 2x - 70 \leq 0$?

278. Osoita, että kaikki kokonaisluvut toteuttavat epäyhtälön $10n^2 + 21 > 30n$.

279. Tyyppiä $x^2 < a$ ja $x^2 > a$ olevien toisen asteen epäyhtälöiden ratkaisut voi päätellä suoraan funktion x^2 kuvaajasta. Kuviossa on epäyhtälön $x^2 < 9$ ratkaisuväli $]-3, 3[$ (eli $-3 < x < 3$).



Päättele epäyhtälön ratkaisu funktion x^2 kuvaajasta.

- a) $x^2 < 4$ b) $x^2 \geq 2$

Myös korkeamman asteen epäyhtälöiden $x^n < a$ ja $x^n > a$ ratkaisut voidaan päätellä potenssifunktion kuvaajan avulla. Hahmottele kuvaaja ja ratkaise epäyhtälö.

- c) $x^4 < 16$
 d) $x^6 > 1\,000\,000$
 e) $x^3 < 125$
 f) $x^5 > -1$

280. Käytä hyväksi potenssifunktioiden x^n kuvaajia ja ratkaise epäyhtälö.

- a) $(x - 4)^6 < 1$
 b) $(x - 5)^4 > 81$
 c) $(2x + 3)^7 < -1$
 d) $(4x + 1)^3 > 8$

Diskriminantti

JOHDANTOESIMERKKI 1

Kuinka monta juurta on yhtälöllä $0,47x^2 - 3,46x + 6,48 = 0$?

Ratkaisu

Koska halutaan tietää vain yhtälön juurten lukumäärä, kertoimia ei tarvitse sijoittaa koko ratkaisukaavaan $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Juurten lukumäärä riippuu kaavassa juurrettavana olevan lausekkeen $b^2 - 4ac$ merkistä. Lausekkeeseen $b^2 - 4ac$ sijoitetaan $a = 0,47$, $b = -3,46$ ja $c = 6,48$.

$$b^2 - 4ac = (-3,46)^2 - 4 \cdot 0,47 \cdot 6,48 = -0,2108.$$

Koska juurrettavaksi tulee negatiivinen luku, yhtälöllä ei ole juuria.

Vastaus

Ei yhtään.

Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$, missä $a \neq 0$, juurten lukumäärä riippuu ratkaisukaavassa

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

juuretavan olevan lausekkeen $b^2 - 4ac$ merkistä. Lauseketta kutsutaan yhtälön diskriminantiksi ja sitä merkitään usein kirjaimella D .

Diskriminantin määritelmä

Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ *diskriminantti* on

$$D = b^2 - 4ac.$$

Diskriminantti ja yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ juurten lukumäärä

Yhtälöllä on kaksi juurta, jos yhtälön diskriminantti on positiivinen.

Yhtälöllä on yksi juuri, jos yhtälön diskriminantti on nolla.

Yhtälöllä ei ole juuria, jos yhtälön diskriminantti on negatiivinen.

ESIMERKKI 2

Kuinka monta juurta on yhtälöllä $4x^2 + 36 = 24x$?

Ratkaisu

$$\begin{aligned} 4x^2 + 36 &= 24x \\ 4x^2 - 24x + 36 &= 0 \end{aligned}$$

Yhtälö saatetaan perusmuotoon $ax^2 + bx + c = 0$.

Lasketaan yhtälön $4x^2 - 24x + 36 = 0$ diskriminantti.

$$D = b^2 - 4ac$$

Sijoitetaan kertoimet $a = 4$, $b = -24$ ja $c = 36$.

$$= (-24)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 36 = 576 - 576 = 0$$

Koska yhtälön diskriminantti on nolla, yhtälöllä on yksi juuri.

Vastaus

yksi

ESIMERKKI 3

Millä vakion p arvoilla yhtälöllä $x^2 + px + 25 = 0$ on kaksi juurta?

Ratkaisu

Toisen asteen yhtälöllä on kaksi juurta, kun yhtälön diskriminantti on positiivinen.

Lasketaan yhtälön $x^2 + px + 25 = 0$ diskriminantti.

$$D = b^2 - 4ac$$

Sijoitetaan kertoimet $a = 1$, $b = p$ ja $c = 25$.

$$= p^2 - 4 \cdot 25 = p^2 - 100$$

Tutkitaan millä muuttujan p arvoilla on $p^2 - 100 > 0$.

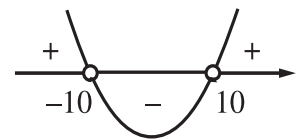
Määritetään toisen asteen polynomifunktion $p^2 - 100$ nollakohdat.

$$p^2 - 100 = 0$$

$$p^2 = 100$$

$$p = 10 \text{ tai } p = -10$$

Funktion $p^2 - 100$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Diskriminantti $p^2 - 100$ on positiivinen, kun $p < -10$ tai $p > 10$.

Vastaus

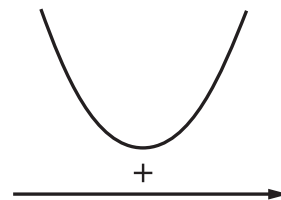
$$p < -10 \text{ tai } p > 10$$

ESIMERKKI 4

Mikä ehto vakion c tulee täyttää, jotta funktio $f(x) = x^2 + 5x + c$ saisi pelkästään positiivisia arvoja?

Ratkaisu

Funktion $f(x) = x^2 + 5x + c$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Funktio saa pelkästään positiivisia arvoja, jos sen kuvaaja on kokonaan x -akselin yläpuolella eli jos funktiolla ei ole yhtään nollakohtaa.



Tutkitaan, millä vakion c arvoilla yhtälöllä $x^2 + 5x + c = 0$ ei ole yhtään juurta.

Yhtälön diskriminantti on

$$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 25 - 4c.$$

Diskriminantin tulee olla negatiivinen.

$$25 - 4c < 0$$

$$-4c < -25 \quad | : (-4) < 0$$

$$c > \frac{25}{4}$$

Funktio f saa pelkästään positiivisia arvoja, kun $c > \frac{25}{4}$.

Vastaus

$$c > \frac{25}{4}$$

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

281. Laske yhtälön diskriminantti. Kuinka monta juurta yhtälöllä on?

- a) $5x^2 + 2x - 3 = 0$
b) $x - 3 = x^2$

282. Millä vakion q arvoilla funktiolla $x^2 - 3x + q$ on

- a) kaksi nollakohtaa
b) yksi nollakohta
c) vähintään yksi nollakohta
d) ei yhtään nollakohtaa?

283. Määritä sellaiset vakion b arvot, että yhtälöllä $36x^2 + bx + 4 = 0$ on vain yksi juuri. Muodosta näitä b :n arvoja vastaavat yhtälöt ja ratkaise ne.

284. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $x(x - a) = -5$ on vähintään yksi juuri?

- 285.** a) Osoita, että funktio $f(x) = x(7 - x)$ ei saa arvoa $\sqrt{151}$.
b) Kuinka monella muuttujan arvolla funktio f saa arvon $\sqrt{150}$?

286. Mikä ehto vakion a tulee täyttää, jotta funktio $g(x) = 3x^2 - 8x + a$ saisi pelkästään positiivisia arvoja?

287. Millä vakion p arvoilla epäyhtälön $x^2 + px + 4 \geq 0$ ratkaisujoukko on koko reaali-lukujen joukko?

288. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $ax^2 + 4x + 3 + a = 0$ on tasan yksi juuri? Mikä tämä juuri on?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

- 289.** a) Kuinka monta juurta yhtälöllä $2x^2 + 6x + 5 = 0$ on?
b) Millä vakion c arvoilla yhtälöllä $2x^2 + 6x + c = 0$ on ainakin yksi juuri?

290. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $4x(a - x) = 1$ on ainakin yksi juuri?

291. Määritä vakiolle q sellainen arvo, että funktioiden $f(x) = x^2 + 3x + q$ ja $g(x) = -x^2 + x$ kuvaajilla on vain yksi yhteinen piste. Mikä tämä yhteinen piste on? Tarkista graafisella laskimella.

- 292.** a) Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $x(x + 3) = a$ on ainakin yksi juuri?
b) Päätele a-kohdan avulla, saako funktio $f(x) = x(x + 3)$ jollain muuttujan arvolla arvon -4 .
c) Mikä on pienin kokonaislukuarvo, jonka funktio $f(x) = x(x + 3)$ saa?

293. Mikä ehto vakion c tulee täyttää, jotta funktio $g(x) = 2x(1 - 2x) + c$ saisi pelkästään negatiivisia arvoja?

294. Mikä ehto vakion a tulee täyttää, jotta funktion $h(x) = x^2 + 6ax - a$ kaikki arvot olisivat positiivisia?

295. Muuttujan arvoa x sanotaan funktion f kiintopisteeksi, jos funktion arvo kohdassa x on x eli $f(x) = x$. Määritä funktion f kiintopisteet, jos

a) $f(x) = (x + 1)^2$

b) $f(x) = (x - 1)^2$.

c) Mikä ehto vakion a tulee täyttää, jotta funktiolla $f(x) = (x + a)^2$ olisi ainakin yksi kiintopiste?

296. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä

$$(a + 1)x^2 + (3a - 1)x + 4 = 0$$

on tasan yksi juuri? Mikä on tämä juuri?

297. Osoita, että yhtälöllä

$$x^2 + (a - 3)x - 3a = 0$$

on kaikilla vakion a arvoilla ainakin yksi reaalijuuri. Millä a :n arvoilla juuria on yksi?

298. Osoita, että yhtälöllä

$$ax^2 - (a + 3)x + 2 = 0$$

on kaikilla vakion a nolasta eroavilla arvoilla kaksi juurta.

Tulon nollasääntö

Ongelma

Kaisa ja Kari valitsivat kumpikin yhden luvun lukujen $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ ja 3 joukosta. Kun laskettiin valittujen lukujen tulo, tulokseksi tuli nolla. Mitä voidaan päätellä valituista luvuista?

JOHDANTOESIMERKKI 1

Ratkaise yhtälö $3(2x + 1)(x - 4) = 0$.

Ratkaisu

Yhtälö $3(2x + 1)(x - 4) = 0$ on toisen asteen yhtälö. Yhtälön voi ratkaista niin, että suoritetaan kertolasku ja käytetään ratkaisukaavaa.

Yhtälön voi ratkaista myös lyhyemmin:

Lukujen tulo on nolla, jos ja vain jos jokin tulon tekijöistä on nolla. Yhtälö $3(2x + 1)(x - 4) = 0$ toteutuu, kun jommankumman tekijän $2x + 1$ tai $x - 4$ arvo on nolla.

$$3(2x + 1)(x - 4) = 0$$

$$2x + 1 = 0 \quad \text{tai} \quad x - 4 = 0 \quad \text{Ratkaistaan kumpikin yhtälö.}$$

$$2x = -1 \quad \text{tai} \quad x = 4$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = 4$$

Vastaus

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = 4$$

Tulon nollasääntö

Tulo on nolla, jos ja vain jos* jokin tulon tekijöistä on nolla.

Tulon nollasäännön avulla voidaan ratkaista yhtälöitä, joiden toinen puoli on tulo ja joiden toisella puolella on nolla.

Tulon nollasäännön käyttäminen on ratkaisukaavan käytölle vaihtoehtoinen tapa ratkaista sellaisia toisen asteen yhtälöitä, joiden vakiotermi on nolla.

ESIMERKKI 2

Ratkaise yhtälö $6x^2 + x = 0$.

Ratkaisu

$$6x^2 + x = 0$$

Termeillä on yhteinen tekijä x . Erotetaan yhteinen tekijä.

$$x(6x + 1) = 0$$

Käytetään tulon nollasääntöä.

$$x = 0 \text{ tai } 6x + 1 = 0 \quad \text{Ratkaistaan yhtälö } 6x + 1 = 0.$$

$$x = 0 \text{ tai } 6x = -1$$

$$x = 0 \text{ tai } x = -\frac{1}{6}$$

Vastaus

$$x = 0 \text{ tai } x = -\frac{1}{6}$$

* Ilmaisuihin *jos ja vain jos* liittävät lauseet ”tulo on nolla” ja ”jokin tulon tekijöistä on nolla” toisiinsa kahdella eri tavalla.

jos: ”Tulo on nolla”, jos ”jokin tulon tekijöistä on nolla”. Toisin sanoen: siitä, että jokin tekijä on nolla, seuraa, että tulo on nolla.

vain jos: ”Tulo on nolla” vain, jos ”jokin tulon tekijöistä on nolla”. Toisin sanoen: siitä, että tulo on nolla, seuraa, että jokin sen tekijä on nolla.

Lauseet, joita sitoo toisiinsa ”jos ja vain jos” ovat *yhtäpitäviä*. Esimerkiksi yhtälöiden ratkaisuvaiheilta edellytetään yhtäpitävyyttä. Ratkaisuaskele

$$\begin{array}{l} 3x - 5 = 7 \\ 3x = 12 \end{array} \quad | + 5$$

perustuu siihen, että luku toteuttaa ensimmäisen yhtälön, jos ja vain jos se toteuttaa toisen yhtälön.

Jokainen toisen asteen yhtälö voidaan ratkaista ratkaisukaavalla. Yhtälö, jonka vakiotermi on nolla, voidaan ratkaista myös tulon nollasäännöllä.

Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx = 0$ ratkaiseminen tulon nollasäännön avulla

Toisen asteen yhtälö, joka on muotoa $ax^2 + bx = 0$, voidaan ratkaista lyhyesti käyttämällä tulon nollasääntöä:

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } ax + b = 0$$

Tulon nollasääntöä voidaan käyttää yhtälön ratkaisemiseen yhtälön asteluvusta riippumatta. Esimerkiksi seuraava yhtälö on viidennen asteen yhtälö.

ESIMERKKI 3

Ratkaise yhtälö $7(x - 2)^3(x + 1)(3x - 1) = 0$.

Ratkaisu

$$7(x - 2)^3(x + 1)(3x - 1) = 0$$

Tulon nollasäännön mukaan tulo on nolla, jos ja vain jos jokin tulon tekijä on nolla. Kerroin 7 on eri suuri kuin 0.

$$(x - 2)^3 = 0 \text{ tai } x + 1 = 0 \text{ tai } 3x - 1 = 0$$

Potenssi on nolla, jos ja vain jos kantaluku on nolla.

$$x - 2 = 0 \text{ tai } x + 1 = 0 \text{ tai } 3x - 1 = 0$$

Ratkaistaan yhtälöt.

$$\begin{array}{lll} x = 2 & \text{tai} & x = -1 & \text{tai} & 3x = 1 \\ x = 2 & \text{tai} & x = -1 & \text{tai} & x = \frac{1}{3} \end{array}$$

Vastaus

$$x = 2 \text{ tai } x = -1 \text{ tai } x = \frac{1}{3}$$

ESIMERKKI 4

Muodosta

- a) toisen asteen yhtälö, jonka juuret ovat -3 ja 2
- b) toisen asteen polynomifunktio f , jolla on nollakohdat -3 ja 2 ja jonka arvo kohdassa 1 on -20 .

Ratkaisu

- a) Tulon nollasäännön nojalla toisen asteen yhtälön

$$(x - (-3))(x - 2) = 0$$

eli yhtälön

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

juuret ovat -3 ja 2 .

Yhtälön juuret eivät muutu, jos yhtälö kerrotaan nollasta eroavalla luvulla. Toisen asteen yhtälön

$$a(x + 3)(x - 2) = 0,$$

missä $a \neq 0$, juuret ovat -3 ja 2 .

- b) Jokaisen toisen asteen polynomifunktion $f(x) = a(x + 3)(x - 2)$, missä $a \neq 0$, nollakohdat ovat -3 ja 2 . Määritetään vakio a niin, että $f(1) = -20$.

Sijoitetaan $x = 1$.

$$f(1) = a(1 + 3)(1 - 2) = a \cdot 4 \cdot (-1) = -4a$$

Ratkaistaan a .

$$-4a = -20 \quad | : (-4)$$

$$a = 5$$

Funktio $f(x) = 5(x + 3)(x - 2)$ täyttää vaaditut ehdot.

Vastaus

- a) $a(x + 3)(x - 2) = 0$, missä $a \neq 0$
- b) $f(x) = 5(x + 3)(x - 2)$

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ**299.** Ratkaise yhtälö.

a) $(x + 3)(x - 2) = 0$

b) $-5(x - 6)(x + \frac{3}{2}) = 0$

c) $4(2x + 5)(3x + 1) = 0$

300. Ratkaise toisen asteen yhtälö käyttämällä tulon nollasääntöä.

a) $4x(2 - x) = 0$ b) $4y^2 + y = 0$

c) $12t^2 = 4t$

301. Ratkaise yhtälö.

a) $x - x^2 = 0$ b) $-x^2 - x = 0$

302. Ratkaise epäyhtälö.

a) $2x^2 + x < 0$ b) $3x^2 > -x$

303. Ratkaise yhtälö.

a) $3(x + 2)(x + 1)(x - 5) = 0$

b) $x(4x + 3)(5x - 1) = 0$

304. Ratkaise yhtälö. Mikä on yhtälön asteluku?

a) $x(x + 1)(x - 2)^2(x + 4)^3 = 0$

b) $2x^3(3x - 5)^2(5x + 6) = 0$

305. Muodosta

a) toisen asteen yhtälö, jonka juuret ovat 5 ja -2

b) toisen asteen polynomifunktio f , jolla on nollakohdat 5 ja -2 ja jonka arvo kohdassa 2 on 4.**306.** Muodosta toisen asteen polynomifunktio $P(x)$, jolla on nollakohdat 0 ja $-\frac{1}{3}$ ja jonka arvo kohdassa 1 on -4.**307.** Muodosta toisen asteen polynomifunktio $f(x)$, jonka ainoa nollakohta on -5 ja jonka arvo kohdassa -4 on 3.**308.** Muodosta neljännen asteen polynomifunktio $Q(x)$, jonka nollakohdat ovat -1, 0, 1 ja 2 ja jolle pätee $Q(3) = 4$.**309.** a) Päteekö ”tulon ykkössääntö”: Tulo on yksi, jos ja vain jos jokin tulon tekijöistä on yksi? Perustele sääntö oikeaksi tai näytä esimerkiksi vääräksi.b) Ratkaise yhtälö $(x - 4)(x + 3) = 1$ c) Päteekö ”tulon n -sääntö” jollekin muulle luvulle n kuin nolla?SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ**310.** Ratkaise yhtälö.

a) $-\frac{1}{4}(x + 5)(x - 3) = 0$

b) $3(x + 7)(2x + 7) = 0$

c) $-4x(4x + \frac{1}{8}) = 0$

d) $18x^2 - 6x = 0$

311. Määritä funktion nollakohdat.

a) $-8x^2 - x$

b) $\frac{1}{3}x^2 + 4x$

312. Mikä on funktion määrittelyjoukko?

a) $f(x) = \frac{x + 3}{2x^2 + 10x}$

b) $g(x) = \frac{x^2 - 3}{6x^2 - x}$

313. Ratkaise yhtälö

- a) $(4 - x)^2 = (4 + x)(4 - x)$
 b) $(x - 2)^2 = 4(2x + 1)^2$

314. Ratkaise yhtälö. Mikä on yhtälön asteluku?

- a) $5(3x - 4)(2x + 1)(x + 7)(x + 9) = 0$
 b) $x^2(x - 5)^2(x + 3)^2(4x - 1) = 0$

315. Muodosta toisen asteen polynomifunktio $f(x)$, jolla on nollakohdat $\frac{1}{2}$ ja $-\frac{2}{3}$ ja jonka arvo kohdassa 1 on 5.

316. Muodosta kolmannen asteen polynomifunktio $g(x)$, jolla on nollakohdat 3, -2 ja -1 ja jonka arvo kohdassa 0 on -12.

317. Muodosta jokin kolmannen asteen yhtälö, jolla on

- a) juuret -1, 3 ja 5
 b) juuret -1 ja 3 eikä muita juuria
 c) ainoana juurena luku 3.

318. Muodosta jokin viidennen asteen yhtälö, jolla on juuret -1 ja 2 eikä muita juuria.

319. Muodosta jokin neljännen asteen yhtälö, jolla on

- a) neljä juurta b) kolme juurta
 c) kaksi juurta d) yksi juuri
 e) ei yhtään juurta.

320. Täydennä seuraavat lauseet, mikäli mahdollista, konjunktioilla *jos*, *vain jos* tai *jos ja vain jos*.

- a) Luku toteuttaa yhtälön $x - 1 = 3$, _____ luku toteuttaa yhtälön $(x - 1)^2 = 9$.
 b) Luvun kuutio on nolla, _____ luku on nolla.
 c) Kahden luvun tulo on yksi, _____ molemmat luvut ovat yhtä suuria kuin yksi.

321. Tutki seuraavista väitteistä P ja Q , seuraako P :stä Q , Q :sta P tai ovatko P ja Q yhtäpitäviä. Perustele tai anna vastaesimerkki.

- a) P : ”lukujen a ja b tulo on positiivinen”,
 Q : ”luvut a ja b ovat molemmat positiivisia”
 b) P : ”lukujen a ja b tulo on negatiivinen”,
 Q : ”luvut a ja b ovat erimerkkiset”
 c) P : ” $x > 3$ ”,
 Q : ” $x^2 > 9$ ”

Korkeamman asteen yhtälöitä ja epäyhtälöitä

Korkeampaa kuin toista astetta olevien yhtälöiden yleiset ratkaisumenetelmät ovat monimutkaisia, eikä niihin perehtyminen sisälly lukio-opintoihin (katso luku Korkeamman asteen yhtälöiden ratkaisukaavat sivulla 124). Edellisessä luvussa luvuissa havaittiin, että korkeamman asteen yhtälöt voidaan joskus ratkaista tulon nollasäännön avulla.

Korkeamman asteen yhtälöt ja tulon nollasääntö

Yhtälö

$$ax^n + bx^{n-1} + \dots = 0,$$

missä $n \geq 3$, voidaan ratkaista käyttämällä tulon nollasääntöä, jos polynomi $ax^n + bx^{n-1} + \dots$ onnistutaan jakamaan sellaisiin tekijöihin, joiden nollakohdat pystytään määrittämään.

ESIMERKKI 1

Ratkaise kolmannen asteen yhtälö $x^3 - 3x^2 - 4x = 0$.

Ratkaisu

$$x^3 - 3x^2 - 4x = 0$$

Polynomin $x^3 - 3x^2 - 4x$ termeillä on yhteinen tekijä x . Erotetaan termien yhteinen tekijä.

$$x(x^2 - 3x - 4) = 0$$

Käytetään tulon nollasääntöä.

$$x = 0 \text{ tai } x^2 - 3x - 4 = 0$$

Ratkaistaan toisen asteen yhtälö.

$$x = 0 \text{ tai } x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$x = 0 \text{ tai } x = \frac{3+5}{2} = 4 \text{ tai } x = \frac{3-5}{2} = -1$$

Vastaus

$$x = 0 \text{ tai } x = 4 \text{ tai } x = -1$$

ESIMERKKI 2

Ratkaise yhtälö $x^6 - 5x^2 = 0$.

Ratkaisu

$$x^6 - 5x^2 = 0$$

$$x^2(x^4 - 5) = 0$$

$$x^2 = 0 \text{ tai } x^4 - 5 = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x^4 = 5$$

$$x = 0 \text{ tai } x = \sqrt[4]{5} \text{ tai } x = -\sqrt[4]{5}$$

Erotetaan termien yhteinen tekijä x^2 .

Käytetään tulon nollasääntöä.

Yhtälössä $x^4 - 5 = 0$ on vain muuttujan potenssi ja vakio. Ratkaistaan yhtälöstä x^4 .

Potenssiyhtälön $x^4 = a$, missä $a > 0$, juuret ovat luvun a neljäs juuri ja sen vastaluku.

Vastaus

$$x = 0 \text{ tai } x = \sqrt[4]{5} \text{ tai } x = -\sqrt[4]{5}$$

ESIMERKKI 3

Ratkaise epäyhtälö $x^3 - 3x^2 - 4x > 0$.

Ratkaisu

On ratkaistava, millä muuttujan x arvoilla funktion $x^3 - 3x^2 - 4x$ arvot ovat positiivisia.

Polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissaan. Määritetään funktion $x^3 - 3x^2 - 4x$ nollakohdat.

$$x^3 - 3x^2 - 4x = 0$$

Yhtälö on ratkaistu esimerkissä 1.

$$x = 0 \text{ tai } x = 4 \text{ tai } x = -1$$

Kohdat, joissa funktio $x^3 - 3x^2 - 4x$ voi vaihtaa merkkiään, ovat suuruusjärjestyksessä pienimmästä suurimpaan -1 , 0 ja 4 . Nollakohdat jakavat lukusuoran väleihin.



Funktion merkki kullakin välillä saadaan selville, kun lasketaan väliltä yksi funktion arvo.*

$$x = -2: \quad (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) = -12 < 0 \quad \text{Välillä }]-\infty, -1[\text{ merkki on miinus.}$$

$$x = -0,5: \quad (-0,5)^3 - 3 \cdot (-0,5)^2 - 4 \cdot (-0,5) \approx 1,1 > 0 \quad \text{Välillä }]-1, 0[\text{ merkki on plus.}$$

$$x = 1: \quad 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = -6 < 0 \quad \text{Välillä }]0, 4[\text{ merkki on miinus.}$$

$$x = 5: \quad 5^3 - 3 \cdot 5^2 - 4 \cdot 5 = 30 > 0 \quad \text{Välillä }]4, \infty[\text{ merkki on plus.}$$

Lasketun arvon merkki kirjataan ns. *merkkikaavioon* kyseiselle välille.

-1	0	4
-	+	-
		+

Merkkikaavion mukaan funktion $x^3 - 3x^2 - 4x$ arvot ovat positiivisia, kun $-1 < x < 0$ tai $x > 4$.**

Vastaus

$$-1 < x < 0 \text{ tai } x > 4$$

* Nyt joudutaan laskemaan saman funktion arvoja useilla eri muuttujan arvoilla. Jos käytettävissä on graafinen laskin, funktio kannattaa syöttää laskimeen grafiikka-funktioksi (piirrettäväksi funktioiksi). Laskimessa on toimintoja, joilla voidaan laskea grafiikkafunktion arvoja.

** Tulos kannattaa tarkistaa graafisella laskimella. Kun piirretään kuvaaja $y = x^3 - 3x^2 - 4x$ välillä, joka sisältää kaikki nollakohdat, niin osoittautuu, että kuvaaja on x -akselin yläpuolella väleillä $-1 < x < 0$ ja $x > 4$.

Polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissa. Siksi korkeamman asteen epäyhtälön voi ratkaista seuraavasti.

Kolmannen ja korkeamman asteen epäyhtälön ratkaiseminen

Epäyhtälön

$$ax^n + bx^{n-1} + \dots > 0 \text{ (tai } < 0 \text{ tai } \geq 0 \text{ tai } \leq 0)$$

ratkaisemiseksi selvitetään funktion

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots$$

merkit.

Tätä varten ensin määritetään funktion nollakohdat ratkaisemalla yhtälö

$$ax^n + bx^{n-1} + \dots = 0.$$

Nollakohdat jakavat lukusuoran osaväleihin. Funktion f merkki osavälillä saadaan selville, kun lasketaan väliltä yksi funktion arvo. Lasketun arvon merkki kirjataan merkkikaavioon. Merkkikaaviosta luetaan välit, joilla epäyhtälö toteutuu.*

* Myös toisen asteen ja ensimmäisenkin asteen epäyhtälöt voi ratkaista niin, että määritetään nollakohdat ja laaditaan merkkikaavio funktion arvoja laskemalla.

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ**322.** Ratkaise yhtälö.

a) $x^3 + x^2 - 12x = 0$ b) $x^3 + 2x^2 + 3x = 0$

323. Ratkaise yhtälö.

a) $x^3 + 5x^2 = 0$ b) $x^3 + x = 0$
c) $x^3 - x = 0$

324. Ratkaise yhtälö.

a) $x^5 - 6x = 0$ b) $x^5 - 6x^2 = 0$

325. Millä muuttujan x arvoilla funktion arvot ovat negatiivisia?

a) $x^3 - 2x^2 - 15x$ b) $x^3 - 6x^2$

326. Millä muuttujan x arvoilla funktion arvot ovat positiivisia?

a) $3x^3 - 4x^2 + x$ b) $-x^3 + 3x$

327. Ratkaise epäyhtälö.

a) $x^3 + x^2 - 2x < 0$ b) $x(x^2 - 8) \geq 2x^2$

328. Ratkaise epäyhtälö.

a) $x - 4 < 3x$ b) $x^2 - 4 < 3x$
c) $x^3 - 4x < 3x^2$

329. Määritä reaaliluvut, joilla on ominaisuus:

- a) Luku on kuutiotaan suurempi.
-
- b) Luvun kuutio on pienempi kuin luvun neljäs potenssi.

330. Millä luvuilla on seuraava ominaisuus?

Luvun neliö on a) yhtä suuri b) suurempi kuin luvun kuution ja itse luvun keskiarvo.

331. Ratkaise yhtälö.

a) $x^2(x + 3) + x(x + 3) - 2(x + 3) = 0$
b) $x^2(x^2 - 8x - 9) - 4(x^2 - 8x - 9) = 0$

332. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $x^3 - 3x^2 - 4x + a + 2 = 0$ on juuri -1 ? Mitkä ovat tällöin yhtälön muut juuret?SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ**333.** Ratkaise yhtälö.

a) $3x^3 - 2x^2 - x = 0$ b) $x^4 + x^2 = 3x^3$

334. Ratkaise yhtälö.

a) $x^5 - x^2 = 0$ b) $x^5 - x = 0$

335. Ratkaise yhtälö

$(9x^2 - 1)(x^3 + 2x^2 + x) = 0.$

336. Millä muuttujan arvoilla funktion arvot ovat positiivisia?

a) $x^3 - 7x^2 + 10x$ b) $x^4 - 2x^3 - 8x^2$

337. Ratkaise epäyhtälö.

a) $x^3 + 6x^2 - 16x > 0$ b) $x^3 < 25x$

338. Ratkaise epäyhtälö.

a) $2 + 3x > 5x$ b) $2 + 3x^2 > 5x$
c) $2x^2 + 3x^3 > 5x$

339. Ratkaise.

a) $x^3 < x^2 + x$ b) $-x^3 + x^2 - x > 0$

340. Millä luvuilla on seuraava ominaisuus?

Luku on a) yhtä suuri b) suurempi kuin neliönsä ja kuutionsa keskiarvo.

341. Ratkaise yhtälö.

- a) $x^2(x-3) - 2x(x-3) + x - 3 = 0$
b) $x^2(x^2-9) - 2(x^2-9) = x(x^2-9)$

342. Ratkaise yhtälö.

- a) $x(x-5)^2 + 4(x-5) = 0$
b) $x(x^2-1) - 6(x-1) = 0$

343. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $x^3 + x^2 + ax = 0$ on kolme juurta?

344. Osoita, että yhtälöllä

$x^3 + ax^2 + ax - 5x = 0$ on kaikilla vakion a arvoilla yhtä arvoa lukuun ottamatta kolme juurta. Millä a :n arvolla juuria on vähemmän kuin kolme?

345. Olkoon $f(x) = x^3 + ax^2 + (a^2 + 1)x$. Osoita, että olipa vakiolla a mikä arvo tahansa, niin $f(x) < 0$, kun $x < 0$, ja $f(x) > 0$, kun $x > 0$.

Nollakohtien ja tekijöiden yhteys

Ongelma

a) Mary, joka ei ollut vielä oppinut toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa, ratkaisi yhtälön $x^2 - 3x - 4 = 0$ seuraavasti. Hän huomasi, että polynomi $x^2 - 3x - 4$ on binomien $x - 4$ ja $x + 1$ tulo:

$$x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1),$$

ja ratkaisi yhtälön tulon nollasäännöllä. Mitkä ovat yhtälön $x^2 - 3x - 4 = 0$ juuret?*

b) Bill ratkaisi yhtälön $x^2 - 3x - 10 = 0$ samalla menetelmällä kuin Mary. Kuinka Bill ratkaisi yhtälön?

c) Vaihto-oppilaat Maija ja Ville eivät osanneet ratkaista yhtälöä $x^2 - 8x - 48 = 0$ Maryn ja Billin menetelmällä, mutta keksivät, kuinka menetelmää voi käyttää toiseen suuntaan. He ratkaisivat yhtälön ratkaisukaavalla ja osasivat ilmaista polynomin $x^2 - 8x - 48$ tulona. Kuinka?

Polynomin tekijöiden ja polynomin nollakohtien välillä on läheinen yhteys:

Jos polynomi onnistutaan jakamaan tekijöihin, niin voidaan käyttää tulon nollasääntöä nollakohtien ratkaisemiseen.

Kääntäen, jos tunnetaan toisen asteen polynomin nollakohdat, niin polynomi voidaan jakaa tekijöihin.

* Joidenkin maiden, muun muassa Yhdysvaltojen, matematiikan opetuksessa harjoitellaan toisen asteen yhtälön ratkaisemista tällä tavalla tekijöihin jakamalla.

Toisen asteen polynomin jakaminen ensimmäisen asteen tekijöihin

Kaksi nollakohtaa

Oletetaan, että yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ on kaksi eri suurta juurta x_1 ja x_2 . Tällöin ensimmäisen asteen polynomit $x - x_1$ ja $x - x_2$ ovat polynomin $ax^2 + bx + c$ tekijöitä niin, että

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Tekijät $x - x_1$ ja $x - x_2$ kerrotaan toisen asteen kertoimella a .

Yksi nollakohta

Oletetaan, että yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ on yksi juuri x_1 . Tällöin $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

Siis jos yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ on vain yksi juuri x_1 , niin ensimmäisen asteen polynomi $x - x_1$ esiintyy kahdesti polynomin $ax^2 + bx + c$ tekijänä. Tämän vuoksi juurta x_1 sanotaan usein yhtälön *kaksoisjuureksi*.

Ei yhtään nollakohtaa

Jos toisen asteen polynomifunktiolla $ax^2 + bx + c$ ei ole nollakohtia, niin yksikään ensimmäisen asteen polynomi ei ole polynomin $ax^2 + bx + c$ tekijä, eli polynomi $ax^2 + bx + c$ on *jaoton*.

Perustelu

Juuria kaksi tai yksi

Yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ on kaksi juurta tai yksi juuri, jos yhtälön diskriminantti $D = b^2 - 4ac$ on epänegatiivinen. Juuret ovat

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

eli lyhyemmin $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ ja $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$.

Juurien lausekkeet pätevät myös silloin, kun $D = 0$, jolloin $x_1 = x_2$.

Osoitetaan laskemalla, että $a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 + bx + c$.

Lasketaan ensin tulo $(x - x_1)(x - x_2)$.

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)$$

Osoitustehtävä tulee muotoon $a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = ax^2 + bx + c$.

Lasketaan juurten summa $x_1 + x_2$:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} && \text{Sama nimittäjä} \\ &= \frac{-b + \sqrt{D} - b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - b}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Lasketaan juurten tulo $x_1 x_2$:

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} && \text{Osoittajat kerrotaan keskenään ja} \\ &&& \text{nimittäjät keskenään.} \\ &= \frac{(-b + \sqrt{D})(-b - \sqrt{D})}{2a \cdot 2a} && \text{Osoittajassa on summan ja erotuksen tulo} \\ &= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{D})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - D}{4a^2} && \text{Sijoitetaan } D = b^2 - 4ac. \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Sijoitetaan polynomiin $a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2)$ juurten summa

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ ja tulo } x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

$$\begin{aligned} a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2) &= a(x^2 - (-\frac{b}{a})x + \frac{c}{a}) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) \\ &= ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

$$\text{Siis } a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 + bx + c.$$

Ei yhtään juurta

Oletetaan, että polynomilla $ax^2 + bx + c$ ei ole nollakohtia.

Jos polynomilla olisi ensimmäisen asteen tekijä $px + q$, missä $p \neq 0$, niin olisi siis

$$ax^2 + bx + c = P(x)(px + q),$$

missä $P(x)$ on jokin ensimmäisen asteen polynomi. Ensimmäisen asteen polynomilla $px + q$ on nollakohta $x = -\frac{q}{p}$, joka olisi myös polynomin $ax^2 + bx + c$ nollakohta.

Siis jos polynomilla $ax^2 + bx + c$ ei ole nollakohtia, sillä ei ole ensimmäisen asteen tekijää.

ESIMERKKI 1

Jaa polynomi $6x^2 - x - 2$ tekijöihin.

Ratkaisu

Ratkaistaan nollakohdat.

$$6x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12}$$

$$x = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$$

Polynomin $6x^2 - x - 2$ nollakohdat ovat $\frac{2}{3}$ ja $-\frac{1}{2}$, joten

$$\begin{aligned} 6x^2 - x - 2 &= 6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) && a(x - x_1)(x - x_2), \text{ missä} \\ &&& a = 6, \quad x_1 = \frac{2}{3} \quad \text{ja} \quad x_2 = -\frac{1}{2}. \\ &= 6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Vastaus

$$6x^2 - x - 2 = 6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)^*$$

* Kokonaislukukertoimisen polynomin tekijät voidaan edelleen saattaa muotoon, jossa kaikki kertoimet ovat kokonaislukuja:

$$6x^2 - x - 2 = 6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 3\left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot 2\left(x + \frac{1}{2}\right) = (3x - 2)(2x + 1)$$

Tekijöihinjaon voi tarkistaa kertolaskulla.

ESIMERKKI 2

Supista, jos mahdollista, murtolauseke $\frac{x^2 + 3x - 10}{3x + 15}$.

Ratkaisu

Jaetaan osoittaja $x^2 + 3x - 10$ tekijöihin.

Murtolauseke voidaan supistaa vain osoittajan ja nimittäjän yhteisellä tekijällä.

Ratkaistaan nollakohdat.

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2}$$

$$x = \frac{-3 + 7}{2} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-3 - 7}{2} = -5$$

Siis

$$x^2 + 3x - 10 = 1(x - 2)(x - (-5))$$

$a(x - x_1)(x - x_2)$, missä
 $a = 1$, $x_1 = 2$ ja $x_2 = -5$.

$$= (x - 2)(x + 5).$$

Nimittäjän termeillä on yhteinen tekijä 3:

$$3x + 15 = 3(x + 5)$$

Siis

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{3x + 15} = \frac{(x - 2)(\cancel{x + 5})}{3(\cancel{x + 5})}$$

Supistetaan yhteisellä tekijällä $x + 5$.

$$= \frac{x - 2}{3}.$$

Vastaus

$$\frac{x - 2}{3}$$

ESIMERKKI 3

Määritä vakiolle b sellainen arvo, että polynomilla $x^2 + bx + 12$ on tekijä $x + 3$. Kuinka polynomi tällöin jakautuu tekijöihin?

Ratkaisu

Toisen asteen polynomilla on tekijä $x + 3 = x - (-3)$, jos ja vain jos -3 on polynomin nollakohta.

Ratkaistaan millä b :n arvolla luku -3 on polynomin $x^2 + bx + 12$ nollakohta. Tulee olla:

$$\begin{aligned} (-3)^2 + b \cdot (-3) + 12 &= 0 \\ 9 - 3b + 12 &= 0 \\ -3b &= -21 && | : (-3) \\ b &= 7 \end{aligned}$$

Kun $b = 7$, polynomi on $x^2 + 7x + 12$. Toisen tekijän löytämiseksi ratkaistaan polynomin toinen nollakohta.

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm 1}{2}$$

$$x = \frac{-7 + 1}{2} = -3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-7 - 1}{2} = -4 \quad \text{Toinen juuri } -3 \text{ oli jo tiedossa.}$$

Siis

$$\begin{aligned} x^2 + 7x + 12 &= 1(x - (-3))(x - (-4)) && a(x - x_1)(x - x_2), \text{ missä} \\ & && a = 1, x_1 = -3 \text{ ja } x_2 = -4. \\ &= (x + 3)(x + 4). \end{aligned}$$

Vastaus

$$b = 7, \quad x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4).$$

Edellä todistettu lause polynomien nollakohtien ja tekijöiden yhteydestä pätee myös korkeamman asteen polynomeille. Lause todistetaan syventävässä kurssissa Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä.

Yleinen lause nollakohtien ja tekijöiden yhteydestä

Olkoon $P(x)$ astetta n oleva polynomifunktio. Tällöin u on yhtälön $P(x) = 0$ juuri, jos ja vain jos $x - u$ on polynomien $P(x)$ tekijä.

Esimerkiksi polynomifunktiolla $x^4 - 4x^3 + 3x - 2$ on nollakohta -1 , sillä $(-1)^4 - 4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1) - 2 = 1 + 4 - 3 - 2 = 0$. Siis polynomilla $x^4 - 4x^3 + 3x - 2$ on tekijä $x - (-1) = x + 1$ eli $x^4 - 4x^3 + 3x - 2 = Q(x)(x + 1)$, missä $Q(x)$ on kolmannen asteen polynomi. Polynomia $Q(x)$ ei tämän kurssin menetelmillä pystytä määrittämään. Tarvittava menetelmä (polynomien jakolasku) opitaan syventävässä kurssissa Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä, jolloin voidaan laskea, että

$$x^4 - 4x^3 + 3x - 2 = (x^3 - 5x^2 + 5x - 2)(x + 1).$$

Lauseen avulla voidaan päätellä polynomiyhtälön juurten suurin mahdollinen lukumäärä:

Jos astetta n olevalla polynomifunktiolla $P(x)$ on k erisuurta nollakohtaa $x_1, x_2, \dots, x_k$, niin jokainen ensimmäisen asteen polynomi $x - x_k$ on polynomien $P(x)$ tekijä. Tällöin

$$P(x) = T(x)(x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_k),$$

missä $T(x)$ on jokin polynomi.

Tulo $(x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_k)$ on astetta k oleva polynomi. Juurten lukumäärä k ei siten voi olla suurempi kuin polynomien P asteluku n , sillä silloin oikean puolen asteluku olisi suurempi kuin vasemman puolen.

Saatiin tulos:

Polynomiyhtälön juurten lukumäärä

Astetta n olevalla polynomiyhtälöllä on enintään n juurta.

ESIMERKKI 4

Tutki yhtälöä graafisesti.

a) $x^3 - 5x^2 + 7 = 0$

b) $x^4 - 8x^3 + 17x + 20 = 0$

Ratkaisu

a) Graafisella laskimella nähdään, että funktion $x^3 - 5x^2 + 7$ kuvaaja leikkaa x -akselin kolmessa kohdassa. Laskimen jäljitystoiminnolla tai arvoja haarukoimalla saadaan näiden juurten likiarvot, yhden desimaalin tarkkuudella $x_1 \approx -1,1$, $x_2 \approx 1,4$ ja $x_3 \approx 4,7$. Koska kolmannen asteen yhtälöllä ei voi olla enempää kuin kolme juurta, yhtälöllä ei ole muita juuria.

b) Kuvaajasta nähdään heti kaksi juurta, yhden desimaalin tarkkuudella $x_1 \approx 2,1$ ja $x_2 \approx 7,7$. Loitontaminen ei ainakaan pian paljasta muita juuria. Neljännen asteen yhtälöllä voi olla neljä juurta, joten yhtälöllä saattaa olla muita juuria. Juurten lukumäärän selvittäminen edellyttää lisätietoja funktiosta $x^4 - 8x^3 + 17x + 20$. Kurssissa Derivaatta opitaan välineitä tällaisen tiedon hankkimiseen.

Vastaus

a) Yhtälön juuret ovat yhden desimaalin tarkkuudella $x_1 \approx -1,1$, $x_2 \approx 1,4$ ja $x_3 \approx 4,7$.

b) Yhtälöllä on juuret $x_1 \approx 2,1$ ja $x_2 \approx 7,7$ sekä enintään kaksi muuta juurta.

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ**346.** Jaa polynomi tekijöihin.

- a) $x^2 + x - 12$ b) $x^2 + 8x + 15$
 c) $6x^2 - x - 12$

347. Jaa tekijöihin.

- a) $x^2 - 6x + 9$ b) $x^2 + x + 3$

348. Osoita, että yhtälöllä $9x^2 + 6x + 1 = 0$ on kaksoisjuuri. Jaa polynomi $9x^2 + 6x + 1$ tekijöihin.**349.** Jaa kolmannen asteen polynomi $x^3 - x^2 - 20x$ ensimmäisen asteen tekijöihin.**350.** Supista.

- a) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ b) $\frac{x^2 + 5x - 14}{5x - 10}$

351. Supista.

- a) $\frac{2x^2 - 5x - 3}{(x - 3)^2}$ b) $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}$

352. Mikä tulee olla vakion p arvo, jotta polynomilla $x^2 + px - 15$ olisi tekijä $x - 3$? Mikä tällöin on toinen tekijä?**353.** Määritä vakiolle c sellainen arvo, että osamäärä $\frac{3x^2 - x + c}{x + 3}$ voidaan supistaa. Mikä on tällöin lausekkeen supistettu muoto?**354.** Tutki yhtälöä graafisesti. Ilmoita löytämiäsi juurten likiarvot yhden desimaalin tarkkuudella.

- a) $x^3 + x^2 - 13x + 5 = 0$
 b) $x^3 + x^2 - 5x + 5 = 0$

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ**355.** Jaa tekijöihin.

- a) $-x^2 + 3x + 28$ b) $12x^2 - x - 1$

356. Jaa tekijöihin.

- a) $12x^2 - x + 1$ b) $12x^2 - 12x + 3$

357. Jaa tekijöihin.

- a) $3x^2 - 75$ b) $3x^2 + 6x$

358. Millä vakion c arvolla yhtälöllä on kaksoisjuuri? Määritä edelleen tämä kaksoisjuuri ja jaa polynomi tekijöihin.

- a) $x^2 - 12x + c = 0$
 b) $x^2 + 5x + c = 0$

359. Supista polynomien osamäärä

$$\frac{8x^2 - 6x + 1}{6x^2 - x - 1}.$$

360. Supista.

- a) $\frac{x^2 + 5x}{x^2 + 3x - 10}$ b) $\frac{x^2 - 12x + 36}{x^2 - 13x + 42}$

361. Millä vakion a arvoilla polynomilla $x^2 + ax - a^2 - 1$ on tekijä $x + 2$? Kuinka polynomi tällöin jakautuu tekijöihin?**362.** Määritä vakiolle b sellainen arvo, että lauseke $\frac{x^2 + 3x + b}{x^2 - 9}$ voidaan supistaa. Mikä on tällöin lausekkeen supistettu muoto?

363. Kun todistettiin, että

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, saatiin sivutuotteenä tietoa toisen asteen yhtälön

$ax^2 + bx + c = 0$ juurten summasta ja tulosta:

juurten summa $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ja juurten tulo

$x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Kaavat pätevät silloin, kun yhtälöllä

on kaksi juurta tai yksi juuri, jolloin $x_1 = x_2$.

a) Yhtälöllä $x^2 + 3x - 10 = 0$ on kaksi juurta. Määritä yhtälöä ratkaisematta juurten summa ja tulo.

b) Yhtälöllä $3x^2 - 6x + 2 = 0$ on kaksi juurta. Määritä yhtälöä ratkaisematta juurten summa ja tulo.

c) Mikä on yhtälön $3x^2 + 4x - 7 = 0$ juurten tulo? Yhtälön kertoimista näkee suoraan, että yhtälöllä on juuri $x = 1$. Mikä on yhtälön toinen juuri?

d) Päätele c-kohdan keinolla yhtälöiden $7x^2 - 5x - 2 = 0$ ja $5x^2 - 9x + 4 = 0$ juuret.

e) Yhtälön $x^2 - 14x - 100$ juuriksi oli saatu luvut 19 ja -5. Kuinka näet heti, että ratkaisu on virheellinen?

364. Ratkaise yhtälöstä $a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$ joko a tai b ja ilmaise kahden muuttujan polynomi $a^2 - 3ab + 2b^2$ kahden binomin tulona. Pura samalla menetelmällä myös $3a^2 + 5ab - 2b^2$ kahden binomin tuloksi.

Seuraavat tehtävät 365–368 perustuvat polynomin nollakohtien ja tekijöiden yleiseen yhteyteen: Luku u on polynomiyhtälön $P(x) = 0$ juuri, jos ja vain jos $x - u$ on polynomin $P(x)$ tekijä.

365. Osoita, että yhtälöllä $2x^3 - 14x + 12 = 0$ on juuret $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ ja $x_3 = 2$. Voiko yhtälöllä olla muita juuria? Jaa polynomi $2x^3 - 14x + 12$ tekijöihin.

366. Määritä sellainen vakion d arvo, että polynomilla $x^3 - x^2 - 2x + d$ on tekijä $x - 2$, ja jaa polynomi tekijöihin.

367. Seuraavassa n on kokonaisluku ja $n > 1$.

a) Osoita, että binomi $x - 1$ on polynomin $x^n - 1$ tekijä.

b) Osoita, että luku $164\,916\,223 (= 44^5 - 1)$ ei ole alkuluku.

c) Voidaan osoittaa, että kun polynomi $x^n - 1$ jaetaan tekijöihin $x^n - 1 = Q(x)(x - 1)$, niin polynomin $Q(x)$ kaikki kertoimet ovat kokonaislukuja. Käytä hyväksi tätä tietoa ja osoita, että jos p on kakkosta suurempi kokonaisluku, niin muotoa $p^n - 1$ oleva kokonaisluku ei ole alkuluku.

d) Jos p on positiivinen kokonaisluku, niin luku $p^n - 1$ voi c-kohdan nojalla olla alkuluku vain silloin, kun $p = 2$. Osoita, että luku $2^n - 1$ voi olla alkuluku vain silloin, kun n on alkuluku.

368. Osoita, että luku $1\,680\,700\,001 (= 70^5 + 1)$ ei ole alkuluku.

Kompleksiluvut ja yhtälön kompleksijuuret

Kompleksiluvut

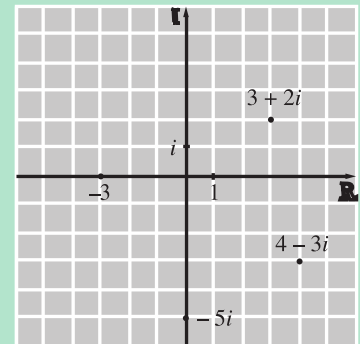
Jotta yhtälöllä $x + 7 = 5$ olisi ratkaisu, luonnollisten lukujen joukosta on siirryttävä kokonaislukuihin. Jotta yhtälöllä $6x = -4$ olisi ratkaisu, kokonaislukujen joukosta on siirryttävä rationaalilukuihin. Jotta yhtälöllä $x^2 = 2$ olisi ratkaisu, rationaalilukujen joukosta on siirryttävä reaalilukuihin.

Reaalilukujen joukossa yhtälöllä $x^2 = -1$ ei ole ratkaisua. Tämän puutteen korjaa lukujoukkojen seuraava ja viimeinen laajennus: *kompleksiluvut*.

Reaalilukujen muodostamasta lukusuorasta siirrytään lukutasoon eli *kompleksitasoon*.

Vaaka-akseli on tavallinen lukusuora $\mathbb{R}$. Pystyakseli on *imaginaariakseli* $\mathbf{I}$. Pystyakselin yksikkö on niin sanottu *imaginaariyksikkö* i .

Tasoon on merkitty kompleksiluvut $3 + 2i$, $4 - 3i$, -3 ja $-5i$.



Tason luvut muodostavat kompleksilukujen joukon $\mathbb{C}$. Kompleksiluvut ovat siis muotoa $a + bi$, missä a ja b ovat reaalilukuja. Luku a on kompleksiluvun $a + bi$ *reaaliosa* ja b luvun *imaginaariosa*. Erityisesti siis reaaliluvut ovat sellaisia kompleksilukuja, joiden imaginaariosa on 0 ($b = 0$).

Kompleksiluvuilla laskemiseen tarvitaan yksi ainoa uusi laskusääntö:

$$i^2 = -1.$$

Kompleksilukujen yhteen- ja kertolasku perustuu tämän jälkeen tavallisiin vaihdanta-, liitântä- ja osittelulakeihin:

Kompleksilukujen $3 + 2i$ ja $-1 + 4i$ summa:

$$(3 + 2i) + (-1 + 4i) = 3 + 2i - 1 + 4i = 2 + 6i.$$

Kompleksilukujen $3 + 2i$ ja $-1 + 4i$ tulo:

$$\begin{aligned} (3 + 2i)(-1 + 4i) &= 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 4i + 2i \cdot (-1) + 2i \cdot 4i \\ &= -3 + 12i - 2i + 8i^2 = -3 + 12i - 2i + 8 \cdot (-1) \\ &= -3 + 12i - 2i - 8 = -11 + 10i \end{aligned}$$

369. Laske kompleksilukujen summa ja erotus.

- a) $-4 - 2i$ ja $3 + 5i$
 b) $4 - 3i$ ja $4 + 3i$

370. Laske kompleksilukujen tulo.

- a) $2i \cdot 3i$
 b) $(1 - 2i)(2 + 3i)$
 c) $(4 + 3i)(4 - 3i)$
 d) $(5 - 4i)^2$

371. Merkitse kompleksiluku $z = 1 + i$ kompleksitasoon. Laske luvun z potensseja z^2 , z^3 , z^4 jne. Merkitse myös ne kompleksitasoon. Tällöin näkyy, kuinka kompleksiluvun potenssit kiertävät origoa.

Kompleksiluvut keksittiin 1500-luvulla apuvälineiksi tutkia toisen ja korkeamman asteen yhtälöiden juuria. Niitä pidettiin pitkään vain teoreettisen matematiikan erikoisuuksina. Myöhemmin on huomattu niiden olevan luonteva matemaattinen väline monien fysiikan ilmiöiden tutkimisessa. Esimerkiksi sähköopissa vaihtovirtapiirien teoria perustuu kompleksilukuihin. Kuten tehtävä 371 havainnollistaa, kompleksiluvut ovat usein hyödyllisiä matemaattisia malleja tilanteissa, joihin liittyy esimerkiksi kiertymistä.

Monilla laskimilla voidaan laskea kompleksilukujen laskutoimituksia. Samoin monet laskimet ilmaisevat esimerkiksi negatiivisten lukujen neliöjuuret kompleksilukuina. Kokeile laskea laskimellasi esimerkiksi $\sqrt{-5}$.

Kompleksilukujen joukossa yhtälöllä $x^2 = -1$ on kaksi juurta:

$$x^2 = -1, \text{ kun } x = i \text{ tai } x = -i.$$

Samoin jokaisella yhtälöllä $x^2 = a$, jossa a on negatiivinen reaaliluku, on kaksi juurta:

$$x^2 = -5, \text{ kun } x = \sqrt{5}i \text{ tai } x = -\sqrt{5}i.$$

372. Ratkaise yhtälö kompleksilukujen joukossa.

a) $x^2 = -4$ b) $x^2 = -3$

373. Yhtälöllä $x^4 = 1$ on kompleksilukujen joukossa neljä juurta. Mitkä ne ovat?

374. Merkitse edellisen tehtävän yhtälön $x^4 = 1$ juuret kompleksitasoon. Juuret sijaitsevat samalla origokeskisellä ympyrällä tasavälein. Päätele edelleen kuviosta, missä sijaitsevat yhtälön $x^8 = 1$ kahdeksan kompleksijuurtta. Määritä juurten likiarvot kuviosta tai käyttämällä Pythagoraan lausetta.

Yhtälön kompleksilukujuuret

Edellä ratkaistiin kompleksilukujen joukossa toisen asteen yhtälöitä, jotka olivat muotoa $x^2 = a$, missä $a < 0$. Jokainen toisen asteen yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$, jolla ei ole reaali-juuria eli jonka diskriminantti on negatiivinen, voidaan ratkaista kompleksilukujen joukossa käyttämällä ratkaisukaavaa.

Ratkaistaan kompleksilukujen joukossa yhtälö $x^2 - 2x + 6 = 0$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{-20}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{20}i}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}i}{2} \\ &= \frac{2(1 \pm \sqrt{5}i)}{2} = 1 \pm \sqrt{5}i \end{aligned}$$

Siis yhtälöllä on kompleksilukujuuret $1 + \sqrt{5}i$ ja $1 - \sqrt{5}i$.

Ratkaisu havainnollistaa, kuinka sellaisella toisen asteen yhtälöllä, jonka diskriminantti on negatiivinen, on aina kaksi kompleksilukujuurta.

Ratkaise yhtälöt kompleksilukujen joukossa.

- 375.** a) $x^2 - 6x + 13 = 0$
 b) $x^2 + x + 1 = 0$
 c) $x^2 + 2x + 4 = 0$

- 376.** a) $x^3 - 6x^2 + 18x = 0$
 b) $x^3 + 2x^2 + 2x = 0$

Toisen asteen polynomi $ax^2 + bx + c$ jaetaan kompleksilukujen joukossa tekijöihin yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ juurten avulla aivan samoin kuin reaali-
 lukujen joukossa. Esimerkiksi yhtälön $x^2 + 1 = 0$ (eli yhtälön $x^2 = -1$) juuret ovat i ja $-i$, joten $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$.
 (Tarkista suorittamalla kertolasku.)

Jaa polynomit ensimmäisen asteen tekijöihin.

- 377.** a) $x^2 + 9$ b) $x^2 - 8x + 17$

- 378.** a) $x^4 - 16$ b) $x^4 + 2x^2 + 1$
 (Vihje: Käytä muistikaavoja.)

Voidaan osoittaa, että kompleksilukujen joukossa jokainen polynomi voidaan jakaa ensimmäisen asteen tekijöihin. Tämä voidaan päätellä seuraavasta lauseesta, jonka nimi kuvaa sen keskeisyyttä matematiikassa.

Algebran peruslause: Kompleksilukujen joukossa jokaisella polynomiyhtälöllä on ainakin yksi juuri.

Korkeamman asteen yhtälöiden ratkaisukaavat

Seuraavalla kaavalla saadaan kolmannen asteen yhtälön $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ juuret. Jokainen kolmannen asteen yhtälö voidaan saattaa tällaiseen muotoon jakamalla yhtälö kolmannen asteen kertoimella.

Olkoon

$$A = \sqrt[3]{-\frac{2p^3 - 9pq + 27r}{54} + \sqrt{\frac{(2p^3 - 9pq + 27r)^2}{2916} + \frac{(3q - p^2)^3}{729}}}$$

ja

$$B = \sqrt[3]{-\frac{2p^3 - 9pq + 27r}{54} - \sqrt{\frac{(2p^3 - 9pq + 27r)^2}{2916} + \frac{(3q - p^2)^3}{729}}}.$$

Yhtälön $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ juuret ovat

$$A + B - \frac{p}{3}, -\frac{A+B}{2} - \frac{p}{3} + \frac{\sqrt{3}(A-B)}{2}i \text{ ja } -\frac{A+B}{2} - \frac{p}{3} - \frac{\sqrt{3}(A-B)}{2}i.$$

Juuret on annettu kompleksilukuina. Yhtälön kertoimista riippuen juurista yksi, kaksi tai kolme on reaalityyppisiä.

Kaavan käyttäminen ei aina ole yksinkertaista, sillä silloin, kun kuutiojuuren sisällä olevan neliöjuurimerkin alle tulee negatiivinen luku, joudutaan määrittämään kompleksiluvun kuutiojuuri.

379. Määritä ratkaisukaavalla yhtälön juuret.

- $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$ (juurten tarkat arvot)
- $x^3 + 3x^2 + 12x + 10 = 0$ (juurten tarkat arvot)
- $x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$ (juurten likiarvot kolmen desimaalin tarkkuudella)

Toisen asteen yhtälöitä ratkaistiin erikoistapauksissa jo Babyloniassa 4 000 vuotta sitten. Toisen asteen yhtälöiden ratkaisukaavan keksi luultavasti arabialainen Al-Khowarizmi 800-luvulla. Euroopassa kaava tuli tunnetuksi 1200-luvulla. Vuosisatojen ajan matemaatikot etsivät menetelmiä korkeamman asteen yhtälöiden ratkaisemiseksi. Renesanssiajan Pohjois-Italiassa 1500-luvulla monet matemaatikot löysivät ratkaisukaavoja kolmannen asteen yhtälöille, ensin niiden erikoistapauksille ja sitten yleiselle yhtälölle. Kaavoja julkaisi Girolamo Cardano vuonna 1545 teoksessaan *Ars Magna*.

1500-luvulla löydettiin ratkaisukaava myös neljännen asteen yhtälölle, ja tämän jälkeen matemaatikot ryhtyivät ratkomaan viidennen asteen yhtälöitä. Ratkaisukaavaa ei löytynyt, ja 1800-luvun alussa osoittautui, että etsiminen oli ollut turhaa: tällöin norjalainen Nils Henrik Abel ja ranskalainen Évariste Galois* osoittivat, että *viidennen ja sitä korkeamman asteen yhtälöillä ei ole ratkaisukaavaa*. Ei siis ole, eikä koskaan tule olemaan, sellaista kertoimien polynomi- ja juurilausekkeista muodostuvaa kaavaa, johon sijoittamalla jokainen tällainen yhtälö voidaan ratkaista.

Kolmannen asteen yhtälöillä on joissain erikoistapauksissa huomattavasti edellistä yksinkertaisempia ratkaisukaavoja. Esimerkiksi yhtälöllä $x^3 + qx = s$, jossa $q > 0$, on aina tasan yksi reaalilukujuuri, joka saadaan seuraavasti:

Ensin lasketaan $k = \frac{q^3}{27} + \frac{s^2}{4}$. Yhtälön juuri on

$$x = \sqrt[3]{\frac{s}{2} + \sqrt{k}} + \sqrt[3]{\frac{s}{2} - \sqrt{k}}.$$

380. Ratkaise yhtälön reaalijuuri käyttämällä edellistä kaavaa.

a) $x^3 + 3x = 2$ b) $x^3 + 6x = 2$

381. Ongelma 1500-luvulta: 12 metriä korkea puu katkeaa ja taittuneen osan pituus on pystyyn jääneen osan pituuden kuutio. Kuinka pitkä on pystyyn jäänyt osa?

* Molempien nuorien nerojen Abelin ja Galois'n kohtalo oli traaginen. Köyhyydessä elänyt Abel kuoli 26-vuotiaana keuhkotautiin. Rakkauden ja politiikan intohimot veivät 20-vuotiaan Galois'n kaksintaisteluun, jossa hän sai surmansa.

Kertaus

Tässä luvussa kerrataan koko kurssi yksityiskohtaisten esimerkkien avulla. Teorian ja menetelmien kertauksen jälkeen on kertaustehtäviä, jotka ovat samojen otsikoiden mukaan järjestettyjä perustehtäviä. Kertausluku päättyy tehtäväsarjoihin, jotka sisältävät pääosin vaativampia tehtäviä koko kurssin alueelta.

Reaaliluvut

Reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ muodostuu rationaali- ja irrationaaliluvuista.

Rationaaliluvut ovat lukuja, jotka voidaan ilmaista murtolukumuodossa $\frac{m}{n}$, missä m ja n ovat kokonaislukuja ($n \neq 0$). Rationaalilukuja ovat erityisesti kaikki kokonaisluvut ja luvut, joiden desimaalimuoto on päättävä tai jaksollinen.

Muut reaaliluvut ovat irrationaalilukuja. Irrationaaliluvun desimaalimuoto on päättymätön ja jaksoton.

Reaalilukujen suuruusjärjestys ilmaistaan epäyhtälömerkkien $<$, $\leq$, $>$ ja $\geq$ avulla.

Lukusuoran välit voidaan kuvailla välin merkinöillä tai käyttämällä muuttujaa ja epäyhtälömerkkejä.

Reaaliluvun itseisarvo on luvun etäisyys origosta. Luvun a itseisarvo merkitään $|a|$.

Epänegatiivisen luvun itseisarvo on luku itse.

Jos $a \geq 0$, niin $|a| = a$.

Jos a on negatiivinen tai nolla, niin luvun itseisarvo on yhtä suuri kuin luvun vastaluku.

Jos $a \leq 0$, niin $|a| = -a$.

Luvut $\frac{17}{11}$, -7 ja $7,23$ ovat rationaalilukuja.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ja $1 - \sqrt{3}$ ovat irrationaalilukuja.

Välillä $] -3, 5]$ ovat ne reaaliluvut, jotka toteuttavat kaksoisepäyhtälön $-3 < x \leq 5$.



Välillä $[-3, \infty[$ ovat ne reaaliluvut, jotka toteuttavat epäyhtälön $x \geq -3$.



$$|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}, \text{ sillä } 2 - \sqrt{3} \approx 0,27 > 0$$

$$|1 - \sqrt{3}| = -(1 - \sqrt{3}) = -1 + \sqrt{3}, \text{ sillä } 1 - \sqrt{3} \approx -0,73 < 0$$

Ensimmäisen asteen epäyhtälö

Kahden reaaliluvun suuruusjärjestys säilyy, jos molempiin lukuihin lisätään tai niistä vähennetään sama luku tai jos molemmat luvut kerrotaan tai jaetaan samalla positiivisella luvulla.

Kahden reaaliluvun suuruusjärjestys vaihtuu, jos molemmat luvut kerrotaan tai jaetaan samalla negatiivisella luvulla.

Epäyhtälöä ratkaistaessa molemmille puolille voidaan siis lisätä tai niistä voidaan vähentää sama termi aivan kuten yhtälöä ratkaistaessa.

Kun epäyhtälön molemmat puolet jaetaan tai kerrotaan positiivisella luvulla, epäyhtälön suunta säilyy.

Jos epäyhtälö jaetaan tai kerrotaan negatiivisella luvulla, niin epäyhtälön suunta vaihtuu.

Ensimmäisen asteen epäyhtälön ratkaisujoukko on aina lukusuoran väli.

$$-5 < 3$$

$$\text{lisätään } 4: \quad -1 < 7$$

$$\text{lisätään } -9: \quad -10 < -2$$

$$\text{kerrotaan } 3\text{:lla:} \quad -30 < -6$$

$$-30 < -6$$

$$\text{jaetaan } -2\text{:lla:} \quad 15 > 3$$

$$4x - 1 > x + 3 \quad | -x + 1$$

$$4x - x > 3 + 1$$

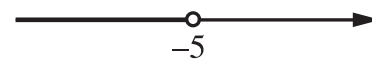
$$3x > 4 \quad | : 3 > 0$$

$$x > \frac{4}{3}$$

$$-3x > 15 \quad | : (-3) < 0$$

$$x < -5$$

Edellä olevan ratkaisun perusteella epäyhtälön $-3x > 15$ toteuttavat luvut, jotka ovat välillä $]-\infty, -5[$.



Funktio

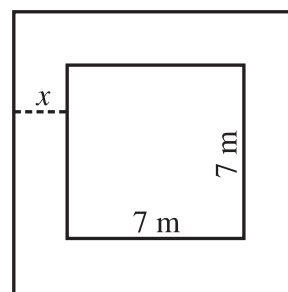
Funktio on sääntö, joka ilmaisee, kuinka jokaisesta funktion määrittelyjoukon luvusta saadaan toinen luku, funktion arvo. Säännön tulee olla sellainen, että se määrää funktion arvon yksikäsitteisesti.

Usein funktiolle voidaan muodostaa lauseke.

Jos funktio on annettu suoraan lausekkeella ilman soveltavaa sisältöä, funktion määrittelyjoukko on suurin mahdollinen joukko, jossa funktion arvo voidaan laskea.

Neliön muotoinen uima-allas, jonka sivun pituus on 7 metriä, ympäröidään tasaleveällä laatoituksella. Määritellään funktio $A(x)$:

$A(x)$ = laatoituksen pinta-ala neliömetreinä, jos laatoituksen leveys on x metriä.



Koska x on laatoituksen leveys, niin mahdollisia muuttujan x arvoja rajaa epäyhtälö $x \geq 0$. Funktiolle A saadaan lauseke

$$\begin{aligned} A(x) &= (2x + 7)^2 - 7^2 \\ &= 4x^2 + 28x + 49 - 49 \\ &= 4x^2 + 28x \end{aligned}$$

Funktion $x^3 - 15x + 19$ määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

Koska vain epänegatiivisilla luvuilla on neliöjuuri, niin funktio $\sqrt{x+3}$ on määritelty, kun $x+3 \geq 0$ eli kun $x \geq -3$. Välin merkinnällä ilmaistuna määrittelyjoukko on $[-3, \infty[$.

Polynomifunktio

Polynomifunktio on funktio, jonka lauseke on polynomi eli monomien (lukujen tai luvulla kerrottujen muuttujan potenssien) summa.

Yhteenlaskettavat monomit ovat polynomin termit.

Polynomifunktion määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

Polynomifunktioita tutkittaessa joudutaan usein suorittamaan polynomien laskutoimituksia.

Yhteenlaskussa voidaan heti poistaa sulkeet ja sen jälkeen yhdistää samaa astetta olevat termit osittelulain avulla.

Vähennyslaskussa lisätään vähentäjän vastapolynomi.

Sulkeet voidaan siis poistaa niin, että vaihdetaan vähentäjän kaikkien termien merkit.

Kertolasku perustuu osittelulakiin.

Jos polynomin termeillä on yhteisenä tekijänä luku tai muuttujan potenssi, niin polynomi voidaan saattaa tulon muotoon. Tulon muotoon saattaminen kannattaa aina tarkistaa kertolaskulla.

$$-x^3 + \frac{x^2}{5} - 7 = -1 \cdot x^3 + \frac{1}{5} \cdot x^2 + (-7)$$

Edellä olevan polynomin kolmannen asteen termi on $-x^3$. Termin kerroin on -1 .

Toisen asteen termi on $\frac{x^2}{5}$. Sen kerroin on $\frac{1}{5}$.

Ensimmäisen asteen termin kerroin on 0 ja vakiotermi on -7 .

$$\begin{aligned} &(-5x^2 + 3x) + (-x^2 + ax) \\ &= -5x^2 + 3x - x^2 + ax = -6x^2 + (3 + a)x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(3x^2 - 4x) - (x^2 - x) \\ &= (3x^2 - 4x) + (-x^2 + x) \\ &= 3x^2 - 4x - x^2 + x = 2x^2 - 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3x^3(x^2 - 5) &= -3x^3 \cdot x^2 + 3x^3 \cdot 5 \\ &= -3x^5 + 15x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (t - 3)(2t + 1) &= 2t^2 + t - 6t - 3 \\ &= 2t^2 - 5t - 3 \end{aligned}$$

$$20x^3 - 15 = 5(4x^3 - 3)$$

$$3x^3 - 2x^2 + x = x(3x^2 - 2x + 1)$$

Muistikaavat

Joitakin laskutoimituksia voi nopeuttaa käyttämällä ns. muistikaavoja.

Summan ja erotuksen tulo

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Kahden luvun summan ja erotuksen tulo on lukujen neliöiden erotus.

Toiseen suuntaan tulkiten: neliöiden erotus on summan ja erotuksen tulo.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Summan neliö

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Summan neliö on neliöiden summa lisättynä kaksinkertaisella tulolla.

Erotuksen neliö

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Erotuksen neliö on neliöiden summa vähennettynä kaksinkertaisella tulolla.

$$\begin{aligned}(3x^2 + 5)(3x^2 - 5) &= (3x^2)^2 - 5^2 \\ &= 9x^4 - 25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3\sqrt{5} - \sqrt{6})(3\sqrt{5} + \sqrt{6}) &= (3\sqrt{5})^2 - (\sqrt{6})^2 \\ &= 3^2 \cdot (\sqrt{5})^2 - 6 = 9 \cdot 5 - 6 = 39\end{aligned}$$

$$t^2 - 36 = t^2 - 6^2 = (t + 6)(t - 6)$$

$$\begin{aligned}(5s + 3)^2 &= (5s)^2 + 2 \cdot 5s \cdot 3 + 3^2 \\ &= 25s^2 + 30s + 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 &= x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= x^2 - 3x + \frac{9}{4}\end{aligned}$$

Toisen asteen polynomifunktio ja toisen asteen yhtälö

Funktio, jonka lauseke on muotoa $ax^2 + bx + c$, missä $a \neq 0$, on toisen asteen polynomifunktio. Toisen asteen polynomifunktion kuvaaja on paraabeli, joka

aukeaa ylöspäin, jos toisen asteen kerroin a on positiivinen,

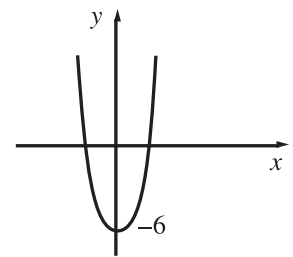
ja alaspäin, jos a on negatiivinen.

Paraabeli on symmetrinen huipun kautta kulkevan y -akselin suuntaisen suoran suhteen.

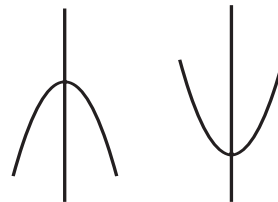
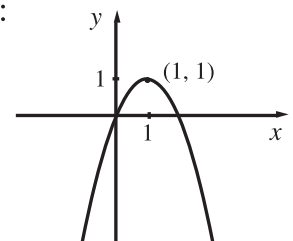
Yhtälö, joka voidaan saattaa muotoon $ax^2 + bx + c = 0$, missä $a \neq 0$, on toisen asteen yhtälö.

Koska funktion $ax^2 + bx + c$ kuvaajaparaabeli kohtaa x -akselin kahdesti, kerran tai ei kertaakaan, toisen asteen yhtälöllä on kaksi, yksi tai ei yhtään juurta.

Funktion $3x^2 - 6$ kuvaaja:

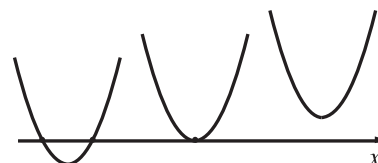


Funktion $-x^2 + 2x$ kuvaaja:



$$3x^2 - 6 = x^2 + 2x$$

$$2x^2 - 2x - 6 = 0$$



Toisen asteen yhtälön ratkaiseminen

Jokainen toisen asteen yhtälö

$ax^2 + bx + c = 0$ voidaan ratkaista ratkaisukaavalla

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Toisen asteen yhtälö, joka on muotoa

$ax^2 + c = 0$ eli jonka ensimmäisen asteen termin kerroin on nolla, voidaan ratkaista myös niin, että ensin ratkaistaan yhtälöstä x^2 .

Toisen asteen yhtälö, joka on muotoa

$ax^2 + bx = 0$ eli jonka vakiotermi on nolla, voidaan ratkaista myös käyttämällä tulon nollasääntöä: Tulo on nolla, jos ja vain jos jokin tulon tekijöistä on nolla.

$$6x^2 - 11x + 3 = 0$$

$$a = 6, b = -11, c = 3$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3}}{2 \cdot 6}$$

$$= \frac{11 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{11 \pm 7}{12}$$

$$x = \frac{11 + 7}{12} = \frac{3}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{11 - 7}{12} = \frac{1}{3}$$

$$3x^2 - 15 = 0$$

$$3x^2 = 15$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \sqrt{5} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{5}$$

$$4x^2 + x = 0$$

$$x(4x + 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 4x + 1 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = -\frac{1}{4}$$

Toisen asteen epäyhtälö

Toisen asteen epäyhtälö $ax^2 + bx + c < 0$ (tai ≤ 0 tai > 0 tai ≥ 0) ratkaistaan tutkimala toisen asteen polynomifunktion merkkiä.

Koska polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään ainoastaan nollakohdissaan, niin ensin ratkaistaan funktion $ax^2 + bx + c$ nollakohdat.

Sitten selvitetään funktion $ax^2 + bx + c$ kuvaajaparaabelin aukeamissuunta.

Hahmotellaan paraabeli ratkaistujen nollakohtien avulla.

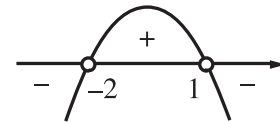
Hahmotellusta kuvaajasta päätellään funktion arvojen merkit.

Ratkaistaan epäyhtälö $-x^2 - x + 2 < 0$ eli selvitetään, millä muuttujan x arvoilla funktion $-x^2 - x + 2$ arvot ovat negatiivisia.

Ratkaistaan yhtälö $-x^2 - x + 2 = 0$.

Ratkaisukaavalla saadaan: $x = 1$ tai $x = -2$

Funktion $-x^2 - x + 2$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $-x^2 - x + 2 < 0$ toteutuu, kun $x < -2$ tai $x > 1$.

Toisen asteen yhtälön diskriminantti

Toisen asteen yhtälön juurten lukumäärää voi tutkia ratkaisukaavassa juurrettavana olevan lausekkeen

$$D = b^2 - 4ac$$

avulla. Lauseke on yhtälön diskriminantti.

Juuria on

kaksi, jos diskriminantti on positiivinen,
yksi, jos diskriminantti on nolla,
ei yhtään, jos diskriminantti on negatiivinen.

Yhtälön $5x^2 - 2\sqrt{15}x + 3 = 0$ diskriminantti

$$D = (-2\sqrt{15})^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3 = 4 \cdot 15 - 60 = 0.$$

Koska yhtälön $5x^2 - 2\sqrt{15}x + 3 = 0$ diskriminantti on 0, yhtälöllä on yksi juuri.

Korkeamman asteen yhtälöt ja epäyhtälöt

Kolmannen ja korkeamman asteen yhtälö $P(x) = 0$ voidaan ratkaista käyttämällä tulon nollasääntöä, jos polynomi P onnistutaan jakamaan sellaisiin tekijöihin, joiden nollakohdat voidaan määrittää.

Epäyhtälö $P(x) < 0$ (tai ≤ 0 tai > 0 tai ≥ 0) ratkaistaan tutkimalla polynomifunktion $P(x)$ merkkiä.

Koska polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissaan, niin ensin määritetään funktion $P(x)$ nollakohdat.

Nollakohdat jakavat lukusuoran osaväleihin. Funktion P merkki osaväleillä saadaan selville, kun lasketaan jokaiselta väliltä yksi funktion arvo.

Lasketun arvon merkki kirjataan merkkikaavioon.

Merkkikaaviosta luetaan välit, joilla epäyhtälö toteutuu.

Viidennen asteen yhtälön

$4(x+1)^3(x-2)(3x-1) = 0$ vasen puoli on valmiiksi jaettu ensimmäisen asteen tekijöihin.

$$4(x+1)^3(x-2)(3x-1) = 0$$

$$x+1=0 \quad \text{tai} \quad x-2=0 \quad \text{tai} \quad 3x-1=0$$

$$x=-1 \quad \text{tai} \quad x=2 \quad \text{tai} \quad x=\frac{1}{3}$$

Yhtälön $x^3 + x^2 - 6x = 0$ vasen puoli voidaan jakaa tekijöihin.

$$x^3 + x^2 - 6x = 0$$

$$x(x^2 + x - 6) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = -3 \quad \text{tai} \quad x = 2$$

Ratkaistaan epäyhtälö $x^3 + x^2 - 6x \geq 0$.

Yhtälö $x^3 + x^2 - 6x = 0$ toteutuu, kun $x = 0$ tai $x = -3$ tai $x = 2$, eli funktion $x^3 + x^2 - 6x$ nollakohdat pienimmästä suurimpaan lueteltuina ovat -3 , 0 ja 2 .

$$x = -4: \quad (-4)^3 + (-4)^2 - 6 \cdot (-4) = -24 < 0$$

$$x = -1: \quad (-1)^3 + (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 6 > 0$$

$$x = 1: \quad 1^3 + 1^2 - 6 \cdot 1 = -4 < 0$$

$$x = 3: \quad 3^3 + 3^2 - 6 \cdot 3 = 18 > 0$$

	-3	0	2
	-	+	-
	+	-	+

Epäyhtälö $x^3 + x^2 - 6x \geq 0$ toteutuu väleillä, joilla funktion arvot ovat positiivisia, ja lisäksi funktion $x^3 + x^2 - 6x$ nollakohdissa. Siis

$$x^3 + x^2 - 6x \geq 0, \text{ kun } -3 \leq x \leq 0 \text{ tai } x \geq 2.$$

Polynomin tekijät

Tulon nollasäännöstä seuraa, että jos binomi $x - u$ on polynomin $P(x)$ tekijä, niin u on polynomin $P(x)$ nollakohta.

Pätee myös käänteinen: toisen asteen polynomin tekijät saadaan, kun ratkaistaan polynomin nollakohdat.

Jos yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ on kaksi juurta x_1 ja x_2 , niin

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Jos yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ on yksi juuri (kaksoisjuuri) x_1 , niin

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

Jos funktiolla $ax^2 + bx + c$ ei ole yhtään nollakohtaa, niin polynomilla $ax^2 + bx + c$ ei ole ensimmäisen asteen tekijöitä. Tällöin sanotaan, että polynomi on jaoton.

Polynomin $-7(x - 3)(x + 4)$ eli polynomin $-7(x - 3)(x - (-4))$ nollakohdat ovat 3 ja -4.

Jaetaan polynomi $-3x^2 + 17x + 6$ tekijöihin.

Määritetään nollakohdat:

$$-3x^2 + 17x + 6 = 0$$

Ratkaisukaavalla: $x = 6$ tai $x = -\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} -3x^2 + 17x + 6 &= -3(x - 6)(x - (-\frac{1}{3})) \\ &= -3(x - 6)(x + \frac{1}{3}) \end{aligned}$$

Yhtälöllä $36x^2 + 60x + 25 = 0$ on yksi juuri

$x = -\frac{5}{6}$. Siis

$$36x^2 + 60x + 25 = 36(x + \frac{5}{6})^2.$$

Yhtälöllä $2x^2 + 3x + 4 = 0$ ei ole juuria, joten polynomi $2x^2 + 3x + 4$ on jaoton

KERTAUSTEHTÄVIÄ

Tehtävät ovat kertausluvun otsikoiden mukaan järjestettyjä perustehtäviä.

REAALILUVUT

382. Merkitse käyttäen välin merkintää niiden reaalitylukujen joukko, jotka toteuttavat epäyhtälön

a) $-5 \leq x < 7$ b) $x \leq 8$.

383. Määritä.

a) $|\sqrt{10} - 3|$ b) $|\sqrt{10} - 5|$

384. Laske

$$|3^{54} - 3^{57}| + |3^{54} - 1891| - |1969 - 3^{57}|.$$

385. Mitkä reaalityluvut toteuttavat

- a) yhtälön $|x| = 5$
 b) epäyhtälön $|x| < 5$
 c) epäyhtälön $|x| \geq 5$?

ENSIMMÄISEN ASTEEN EPÄYHTÄLÖ

386. Ratkaise epäyhtälö. Ilmaise ratkaisujoukko myös välin merkinnällä.

- a) $3x + 2 < 8x - 7$
 b) $x - 5 \geq 1 - 2x$

387. Ratkaise.

- a) $3x - \frac{4x-1}{2} < 1$
 b) $3 - \frac{x-1}{2} \geq x - \frac{3+x}{6}$

388. Ratkaise.

- a) $2x + 3 < 2(x + 3)$
 b) $4x - (x + 6) > 3(x - 2)$
 c) $4x - (x + 6) \geq 3(x - 2)$

389. Joulumyyjien myyntipaikka maksaa 50 euroa ja tonttulakin valmistus 1,50 euroa. Lakit myydään 3 euron hintaan. Kuinka monta tonttulaattia on myytävä, jotta tulot ylittäisivät kulut?

390. Mikä on suurin kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} > x + 100$?

391. Millä vakion k arvoilla yhtälön $3(x + k) = 1$ juuri on välillä $]-\infty, 1]$?

FUNKTIO

392. Funktion h arvo lasketaan seuraavalla säännöllä: luku kerrotaan kahdella, tuloon lisätään luku 3 ja lopuksi lasketaan tämän summan neliön käänteisluku.

- a) Laske $h(-4)$ ja $h(0)$.
 b) Mikä on funktion h lauseke, jos muuttujaa merkitään t ?
 c) Mikä on funktion h määrittelyjoukko?

393. Mikä on funktion määrittelyjoukko?

- a) $\sqrt{-5x-7}$ b) $\frac{\sqrt{x+1}}{x-3}$
 c) $\frac{x-3}{\sqrt{x+1}}$

394. Neliön muotoista uima-allasta ympäröi 3,0 metriä leveä laatoitus. Määritellään funktio $A(x)$:

$A(x)$ = laatoituksen pinta-ala neliömetreinä, jos uima-altaan leveys on x metriä

- a) Mitkä muuttujan x arvot ovat mahdollisia uima-altaan leveyksiä?
 b) Muodosta funktion A lauseke.

395. Piirrä graafisella laskimella funktioiden $f(x) = 3^x - 5x$ ja $g(x) = \sqrt{x+4}$ kuvaajat välillä $[-4, 4]$. Selvitä kuvaajista tällä välillä yhden desimaalin tarkkuudella

- a) funktion f nollakohdat
- b) väli, jolla funktion f arvot ovat negatiivisia
- c) ne muuttujan arvot, joilla funktioiden f ja g arvot ovat yhtä suuret
- d) väli, jolla funktion g arvot ovat suurempia kuin funktion f arvot.

POLYNOMIFUNKTIO

396. Mikä on muuttujan x polynomin

$$-\frac{3x^3}{4} - \pi x + 1 - \sqrt{3}$$

- a) kolmannen asteen termin kerroin
- b) toisen asteen termin kerroin
- c) ensimmäisen asteen termin kerroin?
- d) Mikä on polynomin vakiotermi?
- e) Mikä on polynomin asteluku?

397. Laske polynomien $x^3 - 4x^2 + x - 7$ ja $-2x^3 - x^2 - 2x + 3$ summa ja erotus.

398. Laske $3(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{4}{3}) - \frac{1}{2}(6x^2 - x - 8)$.

399. Laske.

- a) $(3x)^2 - 3x^2$
- b) $3x - x(3 - x^2)$
- c) $(3x - 1)(3 - x^2)$
- d) $3x(x - 1)(3 - x^2)$

400. Mikä on muuttujan t polynomin $(3t^2 - 1)^5$

- a) asteluku
- b) korkeimman asteen termin kerroin
- c) vakiotermi?

401. Ilmaise tulomuodossa.

- a) $3x^2 - x$
- b) $-4t^3 + 6t^2$

402. Supista.

- a) $\frac{12}{6x+3}$
- b) $\frac{6x+9}{2x+3}$

403. Supista.

- a) $\frac{3x^2}{5x^2+x}$
- b) $\frac{x^2-x}{3x-3}$

MUISTIKAAVAT

404. Laske.

- a) $(3x+2)(3x-2)$
- b) $4x(x^3 - \frac{5}{2})(x^3 + \frac{5}{2})$
- c) $(-s+5)(s+5)$

405. Laske.

- a) $(t - \frac{5}{2})^2$
- b) $36(x + \frac{5}{6})^2$
- c) $(5x^2 - 2)^2$

406. Ratkaise epäyhtälö $(x+3)^2 < (x-1)^2$.

407. Laske.

- a) $2x(x-3)^2$
- b) $(x+5)^3$

408. Laske.

- a) $x^2 - (x+3)(x-3)$
- b) $16a - a(a-4)^2$

409. Ilmaise tulomuodossa.

- a) $1 - t^2$
- b) $5x^2 - 80$
- c) $x^3 - 9x$

410. Supista.

a) $\frac{x^2 - 25}{x - 5}$ b) $\frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$

c) $\frac{(x - 1)^2}{x^2 - 1}$

411. Laske.

a) $(5\sqrt{3} - 3\sqrt{5})(5\sqrt{3} + 3\sqrt{5})$

b) $(5\sqrt{3} + 3\sqrt{5})^2$

412. a) Onko luvun $\sqrt{7} - 3$ neliö $16 - 6\sqrt{7}$?

b) Onko luku $\sqrt{7} - 3$ luvun $16 - 6\sqrt{7}$ neliöjuuri?

TOISEN ASTEEN YHTÄLÖ

413. Ratkaise yhtälö.

a) $9x^2 - 18x + 5 = 0$ b) $x(3 - x) = -10$

414. Ratkaise.

a) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{2} = 0$ b) $x^2 - \frac{3x + 1}{9} = -x$

415. Ratkaise.

a) $\frac{6}{x} - 5 = x$ b) $\frac{1}{x} = \frac{9x + 12}{6x - 1}$

416. Ratkaise.

a) $4x^2 - 40 = 0$ b) $9(x^2 - 2) = 7$

417. Ratkaise.

a) $2x^2 - 3x = 0$ b) $3x^2 + x = 0$

c) $5x(4x - 1) = 0$ d) $5(x + 1)(4x - 1) = 0$

418. a) Muodosta toisen asteen yhtälö, jonka juuret ovat -1 ja 5 .

b) Määritä toisen asteen polynomifunktio P , jolla on nollakohdat -1 ja 5 ja jonka arvo kohdassa 0 on -10 .

419. Ratkaise.

a) $(3x - 1)^2 = 2$

b) $(3x - 1)^2 = (2x + 1)^2$

420. Kahden kadun kulmauksessa sijaitsevan suorakulmion muotoisen tontin pinta-ala on $1\,260\text{ m}^2$. Kun tontti aidattiin kummankin kadun puolelta, jouduttiin rakentamaan 72 metriä aita. Mitkä ovat tontin mitat?

421. Suorakulmion muotoisen uima-altaan pituus on 15 m ja leveys 8 m . Allas halutaan ympäröidä joka puolelta yhtä leveällä laatoituksella. Laattoja on käytettävissä 40 m^2 :n suuruisen alueen laatoittamiseen. Kuinka leveä laatoitus voidaan tehdä? Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.

TOISEN ASTEEN EPÄYHTÄLÖ

422. Millä muuttujan x arvoilla funktion arvot ovat positiivisia?

a) $x^2 - 2x - 3$ b) $-x^2 - x$

423. Ratkaise toisen asteen epäyhtälö.

a) $t^2 < 49$ b) $3t^2 \geq 1$

424. Ratkaise epäyhtälö $(x - 5)^2 < (2x + 5)^2$.

425. Ratkaise.

a) $x(x + 8) + 16 \leq 0$

b) $x > 1 + x^2$

c) $10x < x^2 + 25$

426. Osoita, että funktio $3x^2 + x - 2$ saa pelkästään negatiivisia arvoja välillä $]0, \frac{2}{3}[$.

TOISEN ASTEEN YHTÄLÖN DISKRIMINANTTI

427. Määritä yhtälön diskriminantti. Kuinka monta juurta yhtälöllä on?

- a) $4x^2 - 12x + 8 = 0$
b) $4x(3 - x) = 9$

428. Millä vakion q arvoilla funktiolla $3x^2 - 7x + q$ on ainakin yksi nollakohta?

429. Määritä sellaiset vakion a arvot, että yhtälöllä $x(x + a) = -3$ on vain yksi juuri.

430. Millä vakion k arvoilla funktiolla $x^2 + kx + k$ ei ole nollakohtia?
Millä vakion k arvoilla funktio saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja?

431. Määritä vakio a niin, että yhtälöllä $x^2 + (1 - a)x + a + 2 = 0$ on kaksoisjuuri. Mikä tällöin on yhtälön kaksoisjuuri?

KORKEAMMAN ASTEEN YHTÄLÖT JA EPÄYHTÄLÖT

432. Ratkaise yhtälö. Mikä on yhtälön asteluku?

- a) $5x(x + 1)(4x - 1) = 0$
b) $(x + 3)(x - 4)^2(x^4 - 625) = 0$

433. Muodosta kolmannen asteen polynomi-funktio $Q(x)$, jolla on nollakohdat -3 , -2 ja 1 ja jonka arvo kohdassa -1 on 12 .

434. Ratkaise yhtälö.

- a) $x^3 + 10x^2 + 21x = 0$
b) $x^3 = x$
c) $x^4 + 25x^2 = 10x^3$

435. Ratkaise yhtälö

$$(x^2 - 2)(x^3 + 3x^2 + 2x) = 0.$$

436. Millä muuttujan arvoilla funktion arvot ovat negatiivisia?

- a) $x^3 + 5x^2 + 4x$ b) $-4x^3 + x$

437. Ratkaise epäyhtälö.

- a) $2x^3 > x^2 + x$ b) $x^3 \leq 2x^2 - x$

438. Mikä on funktion määrittelyjoukko?

- a) $\frac{x^2 - 4}{x^3 + x^2 - 20x}$ b) $\sqrt{x^3 + x^2 - 20x}$

POLYNOMIN TEKIJÄT

439. Jaa polynomi ensimmäisen asteen tekijöihin.

- a) $x^2 + 2x - 35$ b) $x^2 + 2x + 35$
c) $12x^2 + x - 6$ d) $9x^2 + 12x + 4$

440. Supista lauseke $\frac{x^2 + 2x - 24}{x^2 - 16}$.

441. Määritä sellainen vakion a arvo, että polynomilla $2x^2 + ax - 5$ on tekijä $x + 1$, ja jaa polynomi tekijöihin.

TEHTÄVÄSARJOJA

SARJA A

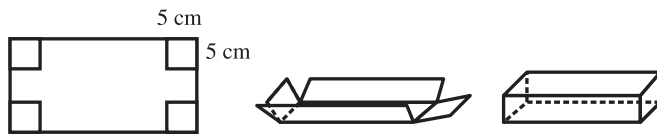
1. Ratkaise epäyhtälö $1 - \frac{x+6}{3} < x$.
2. Toisen asteen polynomifunktiosta P tiedetään funktion nollakohdat -6 ja 5 sekä funktion arvo $P(-1) = 120$. Laske funktion arvo $P(7)$.
3. Ratkaise
 - a) yhtälö $(3 - x^2)(4x^3 - 4x^2 + x) = 0$
 - b) epäyhtälö $(3 - x^2)(4x^3 - 4x^2 + x) > 0$.
4. Kahden kokonaisluvun erotus on 2. Laske-taan lukujen tulo ja lisätään tuloon luku 1. Osoi-ta, että saatu luku on kokonaisluvun neliö.
5. Suorakulmion muotoisen puistoalueen pituus on 32 m ja leveys 24 m. Alueen halki kulkee sekä pituus- että leveyssuunnassa hiekkakäytävä. Molemmat käytävät ovat yhtä leveät, ja ne vievät yhteensä neljäsosan koko alueen pinta-alasta. Kuinka leveät käytävät ovat?
6. a) Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $x + \frac{1}{x} = a$ on ainakin yksi juuri?
 b) Kuinka suuri positiivisen luvun ja sen käänteisluvun summa vähintään on?

SARJA B

1. Millä reaalityöillä on seuraava ominaisuus? Luvun neliö on pienempi kuin luvun vastaluku?
2. Supista lauseke $\frac{x^2 - x - 2}{2x^2 + 3x + 1}$, jos se on mahdollista.
3. Kahden kokonaisluvun erotus on yksi. Osoi-ta, että jos pienemmän luvun neliöön lisätään suurempi luku kerrottuna neljällä tai jos suuremman luvun neliöstä vähennetään pienempi luku kerrottuna neljällä, niin kummallakin tavalla saadaan luku, joka on kokonaisluvun neliö.
4. Millä vakion a arvoilla epäyhtälön $2(x - a) \leq 6x - a$ ratkaisujoukko sisältyy väliin $]3, \infty[$?
5. Pariskunta on perinyt 160 m aitaa ja 70 000 euroa rahaa. Testamentin määräysten mukaan koko raha tulee käyttää suorakulmion muotoisen tontin ostamiseen ja kaikki aita tontin kiertävään aitaan. Tonttimaan neliöhinta on 50 euroa. Mitkä ovat ostettavan tontin mitat?
6. Olkoot a ja b reaalityöitä. Todista, että yhtälöllä $(x - a)(x - b) = 1$ on aina kaksi erisuurta reaalityöitä.

SARJA C

1. Laske lausekkeen $|3 - \sqrt{7}| - |2 - \sqrt{7}|$ tarkka arvo.
2. Kun eräästä luvusta vähennettiin luku 3, saatiin luvun käänteisluku. Mikä luku oli kyseessä?
3. Osoita, että jos n on pariton kokonaisluku ja $|n| \neq 1$, niin murtoluku $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 3}$ supistuu luvulla 4.
4. Suorakulmion muotoisen pahviarkin pituus on kaksi kertaa niin suuri kuin leveys. Arkin jokaisesta nurkasta leikataan pois neliö, jonka sivujen pituus on 5,0 cm, ja arkista taitetaan suorakulmaisen särmiön muotoinen 5,0 cm korkea rasia. Määritä arkin mitat niin, että rasian tilavuus on $1,5 \text{ dm}^3$.



5. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $x(a - 2x) = 1$ on tasan yksi juuri? Ratkaise edelleen näitä a :n arvoja vastaavat yhtälöt.
6. Lukujen $3 - \sqrt{5}$ ja $6 + 2\sqrt{5}$ summan kuutiosta vähennetään lukujen kuutioiden summa ja erotus jaetaan lukujen summalla. Mitä saadaan tulokseksi?

SARJA D

1. Ratkaise epäyhtälö $2 - \frac{3x - 4}{10} < \frac{1}{2}(x + 1)$.
2. a) Osoita, että kahden peräkkäisen parittoman luonnollisen luvun neliöiden erotus on jaollinen luvulla 8.
b) Voidaanko luku 2008 ilmaista kahden peräkkäisen parittoman luonnollisen luvun neliöiden erotuksena? Jos voidaan, niin mitkä ovat nämä luvut?
3. Ratkaise yhtälö $(x^2 + x - 1)^2 = 1$.
4. Millä vakion t arvoilla yhtälön $\frac{x - t}{2} = 3$ juuri toteuttaa epäyhtälön $\frac{1}{3} - \frac{x}{6} < \frac{x - 2}{2}$?
5. Rautalanka, jonka pituus on 4,0 metriä, katkaistaan kahteen osaan, joista molemmista taitutetaan neliöt. Kuinka katkaisukohta on valittava, jotta neliöiden yhteenlaskettu pinta-ala olisi suurempi kuin $0,70 \text{ m}^2$?
6. Millä vakion a arvoilla funktion $\frac{x^2 - a}{3x^2 + ax + 1}$ määrittelyjoukko on koko reaali-lukujen joukko $\mathbb{R}$?

SARJA E

1. Ratkaise.

a) $(3x + 2)^2 < (3x - 1)^2$

b) $x^3 = x$

2. Osoita, että kaikki kokonaisluvut yhtä lukuun ottamatta toteuttavat epäyhtälön

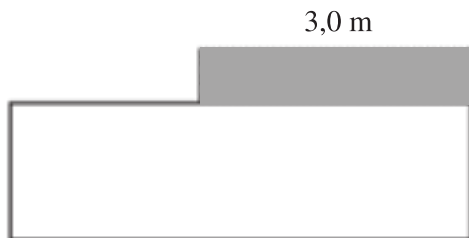
$2n^2 + 49 > 20n$. Mikä on tämä yksi kokonaisluku?

3. Millä vakion a arvoilla luku 3 on yhtälön $(a + 1)x^2 + a^2x - 3 = 0$ juuri? Mikä on tällöin yhtälön toinen juuri?

4. Määritä funktioiden $f(x) = x + \sqrt{-2 - 3x}$ ja $g(x) = x - \sqrt{-2 - 3x}$ määrittelyjoukot. Millä muuttujan x arvoilla funktioiden f ja g arvot ovat toistensa käänteislukuja?

5. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $ax^3 + x^2 + x = 0$ on kolme juurta, millä a :n arvoilla kaksi juurta ja millä a :n arvoilla yksi juuri?

6. Vajan seinän viereen rajataan suorakulmion muotoinen kasvima, jonka yhtenä sivuna on aidalla jatkettu vajan 3,0 m pitkä seinä. Rajaamiseen käytetään 12 m verkkoaitaa. Kuinka pitkä seinää jatkavan aidan tulee olla, jotta aitauksen ala olisi suurempi kuin 12 m^2 ?



Vastaukset

Reaaliluvut

1. a) rationaaliluku
(Päätyvät desimaaliluvut ovat rationaalilukuja.)
b) irrationaaliluku
(Jos kokonaisluvun neliöjuuri ei ole kokonaisluku, niin neliöjuuri on irrationaaliluku.)
c) rationaaliluku
(Jaksolliset desimaaliluvut ovat rationaalilukuja.)
d) irrationaaliluku
(Jaksottomat desimaaliluvut ovat irrationaalilukuja.)
2. a) $b \geq 9,8$ b) $12 < c \leq 15$
c) $x > 0$ d) $x \leq 0$
3. a) $[-1, 3[$ b) $]8, 9[$
c) $] -\infty, 1]$ d) $] -\infty, -2[$
4. a) $] -\infty, 0[$ b) $[0, \infty[$
5. $-\sqrt{3}$, 4,99999 ja $5 - \sqrt{3}$
6. a) 5,5 b) Ei ole. c) $[5,5; 6,5[$
7. a) $-\sqrt{5}$ b) π
c) $3 + \sqrt{7}$ d) $-2 + \sqrt{5}$
8. a) $\sqrt{3}$ b) 6
c) $2 - \sqrt{3}$ d) $-1 + \sqrt{3}$
9. a) $-6 < x < 6$, väli $] -6, 6[$
b) $x < -6$ tai $x > 6$
10. a) $-2 < x < 8$, väli $] -2, 8[$
b) $-2 \leq x \leq 8$, väli $[-2, 8]$
c) $x < -2$ tai $x > 8$
d) $x \leq -2$ tai $x \geq 8$
11. Esimerkiksi 0,111011001... (nolla pilkku yksitoista satayksi tuhatyksi ...)
12. a) 200 tonnia
b) 60 tonnia
c) Lujuuslaskelman mukaan sillan kantavuus on 1,0 tonnia.
13. a) $-3 < x < 5$, $] -3, 5[$
b) $-3 \leq x \leq 4,9$, $[-3; 4,9]$
c) $x < 4,91$, $] -\infty; 4,91[$
d) esimerkiksi 4,95
e) -3
f) esimerkiksi 4,905
14. -4,5, -4,49999 ja $-\frac{355}{113}$
15. a) Pienin luku 1 ja suurin luku 5.
b) Pienintä lukua ei ole, suurin 5.
c) Ei pienintä eikä suurinta lukua.
16. a) $[0,65; 0,75[$
b) $[2,995; 3,005[$
17. a) $\sqrt{3} - 1$ b) $-\sqrt{3} + 2$
c) $-3 + \sqrt{10}$ d) $3 - \sqrt{5}$
18. a) $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$, väli $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$
b) $x \leq -\sqrt{5}$ tai $x \geq \sqrt{5}$
19. a) $-7 \leq x \leq 3$, väli $[-7, 3]$
b) $x < -10$ tai $x > 4$
c) $x < -10$ tai $x > 0$
d) $x > 4$, väli $]4, \infty[$

20. Lukujen tulo on 1.

21. a) esimerkiksi $\sqrt{1 + 10^{-30}}$
 b) esimerkiksi $\sqrt{1 + 2 \cdot 10^{-21}}$

22. a) $a < 0$ ja n pariton
 b) joko $a \neq 0$ ja n parillinen tai $a > 0$ ja n pariton
 c) $a < 0$ ja n pariton
 d) joko $a \neq 0$ ja n parillinen tai $a < 0$ ja n pariton
 e) $a > 0$ ja n pariton
 f) joko $a \neq 0$ ja n parillinen tai $a > 0$ ja n pariton

Ensimmäisen asteen epäyhtälö

23. a) $x < -1$, ratkaisuväli $]-\infty, -1[$



- b) $x \leq 8$, ratkaisuväli $]-\infty, 8]$



24. a) $x \geq \frac{3}{2}$ b) $x > -3$

25. yli 10 minuuttia kestävillä
 (Epäyhtälö $0,16 + 0,044x < 0,06x$.)

26. a) $x < 0$ b) $x > 0$

27. a) Epäyhtälön toteuttavat kaikki reaaliluvut.
 (Epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön $-3 < 2$ (tai $-5 < 0$) kanssa, joten epäyhtälö on tosi muuttujan x arvosta riippumatta.)
 b) Epäyhtälöä ei toteuta mikään reaaliluku.
 (Epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön $15 < 8$ (tai $7 < 0$) kanssa, joten epäyhtälö on epätosi muuttujan x arvosta riippumatta.)

28. $s < -15$, ratkaisujoukko $]-\infty, -15[$
 (Epäyhtälö $-30 - 2s > 0$.)

29. a) $x \geq \frac{3}{4}$

(Kun epäyhtälö kerrotaan positiivisella luvulla 5, se tulee muotoon $5x - 3 \geq x$.)

- b) $x < -2\frac{1}{4}$

(Kun epäyhtälö kerrotaan positiivisella luvulla 12, se tulee muotoon $6x + 9 < 2x$.)

30. $k = \frac{2}{3}$ (Epäyhtälö $4(x - k) < 8(x + k)$

toteutuu, kun $x > -3k$, eli ratkaisujoukko on väli $]-3k, \infty[$. Tulee olla $-3k = -2$.)

31. a) $x < -\frac{1}{3 - \sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7} - 3}$

- b) $x \leq \frac{1}{\sqrt{3} - 2}$

32. Epäyhtälön ratkaisujoukko $]-\infty, 5]$ sisältää negatiivisten reaalilukujen joukon $]-\infty, 0[$.

33. 0, 1, 2, 3, 4 ja 5 (Epäyhtälön ratkaisuvälillä $]-\infty, \frac{57}{11}]$ olevat luonnolliset luvut.)

34. $\frac{12}{5} < t < 4$

(Muuttujan t arvot, jotka toteuttavat molemmat epäyhtälöt $5t - 12 > 0$ ja $5t - 12 < 8$.)

35. $-\frac{4}{5} < s < \frac{4}{5}$

36. a) $x > 0$, $]0, \infty[$
 b) $x < 0$, $]-\infty, 0[$
 c) $x < -125$, $]-\infty, -125[$

37. a) $x \geq \frac{5}{4}$ b) $x \leq -\frac{11}{6}$

38. a) $x > 0$
 b) Epäyhtälön toteuttavat kaikki reaaliluvut.

39. $0 < t < 3$

40. a) yli 200 km
 b) alle 25 vrk

41. a) $x < -\frac{5}{2}$ b) $x > 2$

(Kerro ensin nimittäjät pois. Kun epäyhtälö kerrotaan positiivisella luvulla, epäyhtälön suunta säilyy.)

42. -9 (Epäyhtälön $\frac{n}{7} \geq \frac{n}{6} + \frac{1}{5}$ ratkaisuväli on $]-\infty; -8,4[$.)

43. a) $x < \frac{6}{\pi-2}, 5$

b) $x < \frac{6}{\pi-\sqrt{10}}, -291$

44. $b < 4$ (Yhtälön juuri on $x = 3 - 2b$. Ratkaistaan epäyhtälö $3 - 2b > -5$.)

45. $a > -\frac{1}{4}$ (Ratkaisuväli on $]-4a, \infty[$. Tulee olla $-4a < 1$.)

46. Epäyhtälön $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \geq x$ ratkaisujoukko $]-\infty, -\frac{1}{2}]$ sisältyy epäyhtälön $x - \frac{2}{3} < \frac{x}{6}$ ratkaisujoukkoon $]-\infty, \frac{4}{5}[$.

47. a) $a > -\frac{1}{3}$ b) $a \leq -\frac{1}{3}$

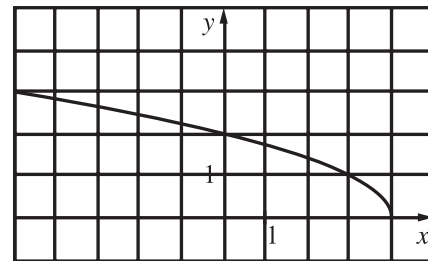
(Epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön $-3a < 1$ kanssa.)

Funktio

48. a) $f(1) = -64, f(7) = 8$
 b) $f(s) = (s-5)^3$
 c) $\mathbb{R}$ (Funktio f on määritelty kaikilla muuttujan arvoilla.)

49. a) $\mathbb{R}$
 b) $\mathbb{R}$
 c) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (määrittelyehto $x \neq 0$)
 d) $]0, \infty[$ (määrittelyehto $x > 0$)
 e) $\mathbb{R}$
 f) $[0, \infty[$ (määrittelyehto $x \geq 0$)

50. määrittelyjoukko $]-\infty, 4]$
 (määrittelyehto $x \leq 4$)



51. $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$ (Määrittelyehto $x \neq -\frac{2}{3}$.)

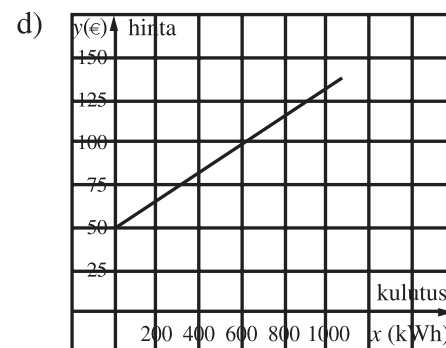
52. a) Ei voi olla, sillä esimerkiksi muuttujan arvon 1 kohdalla on kaksi käyrän pistettä.
 b) Voi olla, sillä jokaisen muuttujan arvon kohdalla on vain yksi käyrän piste.
 c) Ei voi olla, sillä esimerkiksi muuttujan arvon 1 kohdalla on kolme käyrän pistettä.

53. a) $f(-4) = 2, f(0) = -2, f(1) = -3$
 b) -3 ja 4
 c) $-5, -1$ ja 3
 d) suurin arvo 4 , pienin arvo -3

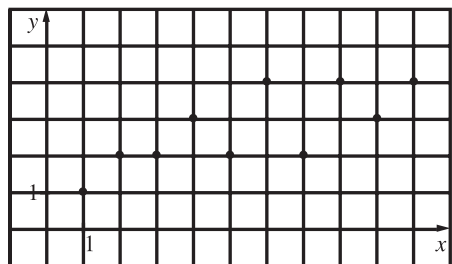
54. a) -6 b) $\frac{3}{4}$

c) Muuttujan arvoilla $x < \frac{3}{4}$ eli välillä $]-\infty, \frac{3}{4}[$ olevilla muuttujan arvoilla.

55. a) $h(500) = 90$ ja $h(1000) = 130$
 b) epänegatiiviset arvot eli $x \geq 0$ (Sähkönkulutus ei tietenkään voi olla kuinka suuri tahansa, mutta mitään täsmällistä ylärajaa ei ole.)
 c) $h(x) = 50 + 0,08x$



56. $\text{tek}(10) = 4$, $\text{tek}(12) = 6$ ja $\text{tek}(17) = 2$



57. a) $\frac{1}{7}$

b) $f(x) = \frac{1}{3x+1}$

c) $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$ (määrittelyehto $x \neq -\frac{1}{3}$)

58. a) $P(-3) = 12$ b) $Q(5) = -10$

59. a) $[-4, \infty[$ ($x \geq -4$)

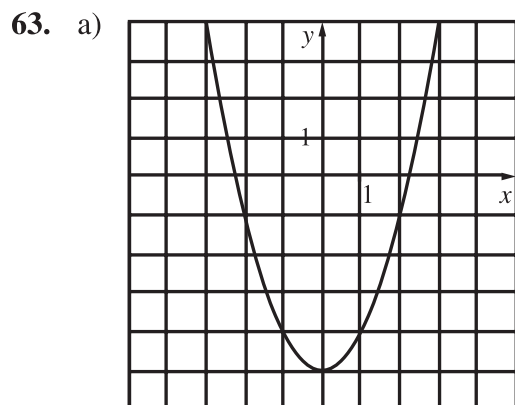
b) $] -4, \infty[$ ($x > -4$)

c) $] -\infty, -\frac{1}{3}]$ ($x \leq -\frac{1}{3}$)

60. $\mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$ (Määrittelyehto: $x \neq 0$ ja $x \neq 3$.)

61. a) $\frac{2}{3}$ b) $x < \frac{2}{3}$

62. a) 15 b) $\frac{6}{7}$, arvo on $-\frac{3}{7}$



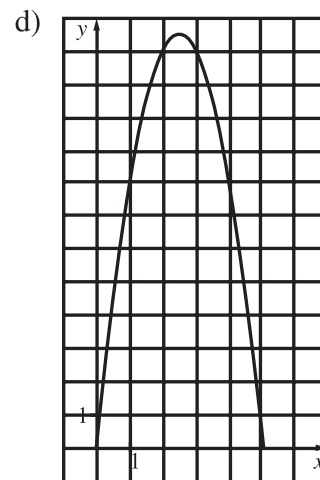
Nollakohdat noin $-2,2$ ja $2,2$.

b) $-\sqrt{5}$ ja $\sqrt{5}$

64. a) $A(1,8) = 1,8(10 - 2 \cdot 1,8) = 11,52$,
 $A(3,5) = 10,5$

b) Välillä $]0, 5[$ olevat muuttujan arvot (tai välillä $[0, 5]$, jos tilanteita $x = 0$ ja $x = 5$ pidetään aitauksina.)

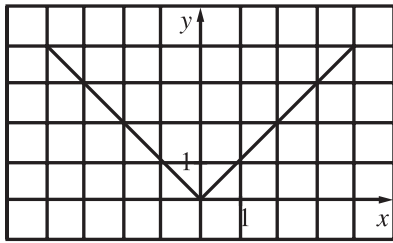
c) $A(x) = x(10 - 2x)$



Pinta-ala on suurin, kun seinää vastaan kohtisuoran sivun pituus x on 2,5 metriä ja seinän suuntaisen sivun pituus 5 metriä.

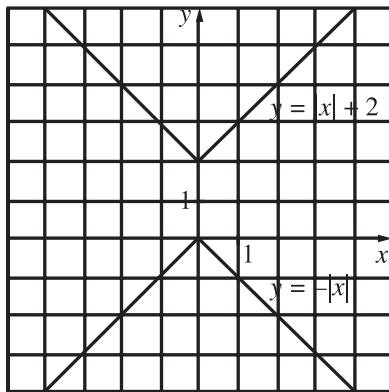
65. a) $-0,6$ ja $-4,9$
b) kohdissa $-4,2$ ja $6,6$
c) $-3,3$ ja $6,3$
d) $-6,0$

66. a)



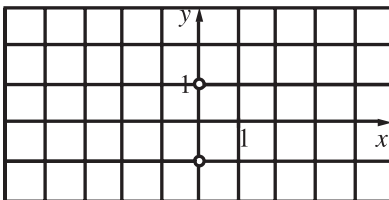
(Positiivisen luvun x itseisarvo on luku x itse. Negatiivisen luvun x itseisarvo on luvun vastaluku $-x$. Kuvaajan voi piirtää myös graafisella laskimella. Laskimessa itseisarvofunktio on yleensä ABS.)

b)



(Funktion $|x| + 2$ kuvaaja saadaan nostamalla funktion $|x|$ kuvaajaa kaksi yksikköä. Funktion $-|x|$ kuvaaja on funktion $|x|$ kuvaajan peilikuva y -akselin suhteen.)

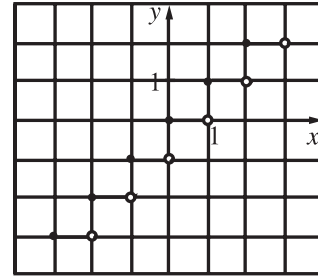
67. Määrittelyjoukko $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (määrittelyehto $x \neq 0$)



(Funktion $\frac{|x|}{x}$ arvo on 1, kun $x > 0$ ja -1 , kun $x < 0$. Pisteet $(0, 1)$ ja $(0, -1)$ eivät kuulu kuvaajaan, joten pisteisiin on merkitty avoin rengas.)

68. a) 3, 3, -2 ja -3

b)



Jokaisen janan toiseen päätepisteeseen $(-3, -3)$, $(-2, -2)$ jne. piirretty umpinainen ympyrä ilmaisee, että pisteen y -koordinaatti on funktion arvo: $\text{int}(-3) = -3$, $\text{int}(-2) = -2$ jne. Vastaavasti janan toiseen päätepisteeseen $(-2, -3)$, $(-1, -2)$ jne. piirretty avoin ympyrä ilmaisee, että pisteen y -koordinaatti ei ole funktion arvo. Kuvaajansa takia funktiota int kutsutaan usein *porrasfunktiksi*.

c) Piirtäessään funktion kuvaajaa laskin laskee kuvaajan pisteitä tietyin (määriteltävissä olevin) välein ja yhdistää aina peräkkäiset pisteet janalla.

69. $h(x) = 1,80 + 0,30 \text{ int}(x)$, missä $x > 0$

Polynomilaskennan kertaus ja täydennys

70. $5x^3 + (-4x^2) + 7x + (-16)$

71. a) viisi b) $6x$ c) $-x^2$
d) -1 e) 0 f) -5

72. $t^3 - 3t^2 + \frac{2}{3}$

73. a) $-\frac{1}{3}$ b) $\frac{4}{5}$

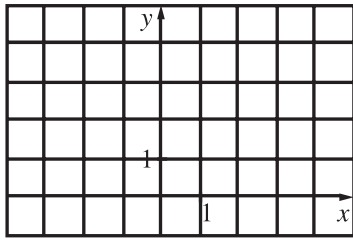
$$\left(-\frac{x^2}{3} + \frac{4x}{5}\right) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{5}x$$

74. a) On. Määrittelyjoukko $\mathbb{R}$.
b) On. Määrittelyjoukko $\mathbb{R}$.

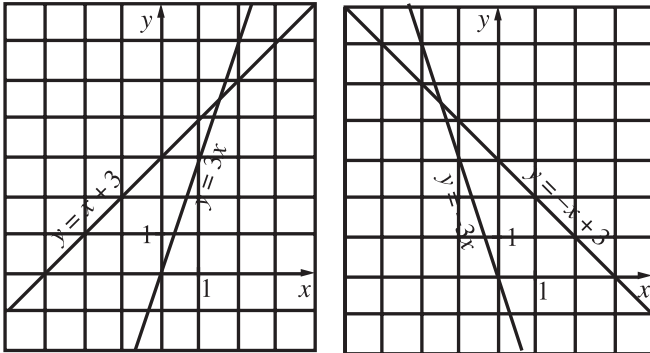
$$(g(x) = x^4 - 5x^2 + \frac{1}{3}x - 5)$$

c) Ei ole. Määrittelyjoukko $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (määrittelyehto $x \neq 0$)

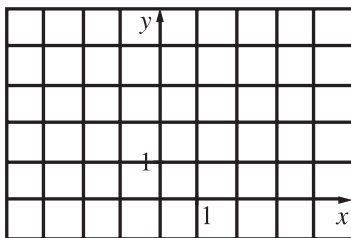
75. a) 4 b) 4 c) 4



76.



77. a) $r < \frac{3}{2}$ (Ratkaistaan epäyhtälö $6 - 4r > 0$.)
 b) $r > \frac{3}{2}$ ($6 - 4r < 0$)
 c) $r = \frac{3}{2}$ ($6 - 4r = 0$)

Vakiofunktion $f(x) = 3$ kuvaaja.

78. a) $-\frac{1}{2}x$ b) $\frac{4}{3}x^2$ ($= \frac{4x^2}{3}$)
79. a) $(x^2 - 4x + 1) + (-x^2 + x - 3) = -3x - 2$
 b) $(x^2 - 4x + 1) - (-x^2 + x - 3) = 2x^2 - 5x + 4$
80. a) $3x - (-2x + 1) = 5x - 1$
 b) $-5 - (6x - 3) = -6x - 2$
81. a) $-x^2 - 1$ b) $-2a + 1$
82. $2a^3 + 1$

83. $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x$

84. a) $x = \frac{1}{8}$

(Kun yhtälö kerrotaan luvulla 2 ja supistetaan, saadaan yhtälö $6x - (1 - 4x) = 2x$.)

b) $x = -\frac{7}{5}$

(Kun yhtälö kerrotaan luvulla 2 ja supistetaan, saadaan yhtälö $6x + 10 - (x + 1) = 2$.)

85. $x > 3$

(Kun epäyhtälö kerrotaan positiivisella luvulla 4, saadaan epäyhtälö $2(2x - 1) - (3x + 1) > 0$.)

86. $(a - 3)x - 2 - a$

a) $a - 3$ b) $-2 - a$

87. a) $-5x^7$ b) $\frac{1}{2}x^5$ c) $-20ax^5$

88. a) $25x^2$ b) $\frac{x^2}{9}$
 c) $16x^6$ d) $-27x^{12}$

89. a) $-t^4 + 7t^2 - 5t$

b) $5x^6 + 5x^5 - 5x^3$

90. a) $4x - 18$ b) $-s^2 + 10s$

91. $x = 0$ ($4 - 2x + 6 = x + 10$)

92. $x^2 + 4x + 12$

93. a) $x = -\frac{5}{14}$ (Kun yhtälö kerrotaan luvulla 6, saadaan yhtälö $3 - 2(x + 4) = 12x$.)

b) $x = -\frac{1}{3}$ (Kun yhtälö kerrotaan luvulla 6, saadaan yhtälö $3x^2 - 1 - 3(x^2 - x) = 6x$.)

94. $x \leq \frac{15}{4}$ (Kun epäyhtälö kerrotaan positiivisella luvulla 6, saadaan epäyhtälö $6 - 3(x - 6) \geq 6x - (x + 6)$.)
95. a) $3(4x - 1)$ b) $x(x + 1)$
c) $2x(x - 3)$ d) $x^2(x^2 + 4x - 1)$
e) $2x(4x^2 + 3x + 1)$
96. a) $\frac{x+4}{2x}$ (Osoittajalla ja nimittäjällä on yhteinen tekijä 3.)
b) $\frac{5}{4}$ (Osoittajalla ja nimittäjällä on yhteinen tekijä $t + 2$.)
97. a) $\frac{1}{t+1}$ (Osoittajalla ja nimittäjällä on yhteinen tekijä t .)
b) $\frac{x+10}{5x}$ (Osoittajalla ja nimittäjällä on yhteinen tekijä x .)
c) $\frac{5}{3x}$ (Osoittajalla ja nimittäjällä on yhteinen tekijä $x + 2$.)
98. a) $x^2(6x^4 - 1)$ b) $x^2(x^n - 1)$
c) $x^n(x^2 - 1)$ d) $x^n(x^n - 1)$
99. Lukuja voidaan merkitä esimerkiksi $n, n + 1$ ja $n + 2$. Lukujen summa on $3n + 3 = 3(n + 1)$. Siis summa $3n + 3$ on kokonaislukujen 3 ja $n + 1$ tulo.
100. Lukuja voidaan merkitä esimerkiksi $2n + 1, 2n + 3, 2n + 5$ ja $2n + 7$, missä n on kokonaisluku. Lukujen summa on $8n + 16 = 8(n + 2)$. Siis summa on luvun 8 ja kokonaisluvun $n + 2$ tulo.
101. a) $12x^2 - 25x + 12$
b) $x^3 - 4x^2 - 3x + 12$
c) $-a^9 + a^8 + a^7 - a^6$
d) $x^3 + x^2 + 2x + 8$
102. a) $4x^2 - 9$ b) $9x^2 + 30x + 25$
c) $u^2 - 12u + 36$
 $((u - 6)^2 = (u - 6)(u - 6))$
103. a) $7x^2 - 14x - 21$
 $(7(x - 3)(x + 1) = 7(x^2 - 2x - 3))$
b) $3x^4 - 5x^3 - 2x^2$
 $(x^2(3x + 1)(x - 2) = x^2(3x^2 - 5x - 2))$
104. a) $2 + 4\sqrt{3}$ b) $2 + 19\sqrt{6}$
105. $-10x + 22$ (Välivaiheessa on käytettävä sulkeita: $x^2 - 7x + 12 - (x^2 + 3x - 10)$.)
106. $x^3 + 4x^2 - 8$
 $(x^3 + 5x^2 - 6x - (x^2 - 6x + 8))$
107. $-x^3 + 5x^2$
 $6x - (x^3 - 5x^2 + 6x)$
108. a) viidettä astetta
(Tulopolynomin korkeimman asteen termi on tekijöiden korkeimman asteen termien tulo)
b) neljättä astetta
c) seitsemättä astetta
109. a) vakiotermi -120 ,
korkeimman asteen termi t^5
(Tulon vakiotermi on tekijöiden vakiotermien tulo ja korkeimman asteen termi on tekijöiden korkeimman asteen termien tulo.)
b) vakiotermi 0,
korkeimman asteen termi $30t^9$
110. a) $-\frac{9}{4}$ (Sieventämätön muoto on tulo, joten kannattaa sijoittaa siihen.)
b) 3 (Kannattaa sijoittaa sievennettyyn muotoon $2x$.)
111. $4x^2 + 160x$ neliösenttimetriä
 $((50 + 2x)(30 + 2x) - 50 \cdot 30)$
112. $x^2 - 150x + 5000$ neliömetriä

113. $8x^3 + 480x^2 + 9400x$ kuutiosenttimetriä
 $((30 + 2x)(40 + 2x)(50 + 2x) - 30 \cdot 40 \cdot 50)$

114. $-a^3 + 2a^2b + 4a^2 - 4ab - b^2$

115. $t^2 + (a - 2)t - 2a$

a) $a - 2$ b) $-2a$

116. $3x^4 - (3\sqrt{3} + \sqrt{2})x^2 + \sqrt{6}$

a) $-(3\sqrt{3} + \sqrt{2})$

b) $\sqrt{6}$

Summan ja erotuksen tulo

117. a) $x^2 - 1$ b) $x^2 - 49$

c) $25 - x^2$ d) $t^2 - 16$

118. a) $x^2 - 9$ b) $x^2 - \frac{1}{9}$

c) $9x^2 - 1$ d) $25x^6 - 1$

119. a) $4x^2 - 100$ $(4(x^2 - 25))$

b) $x^3 - 36x$ $(x(x^2 - 36))$

c) $x^4 - 81$ $((x^2 + 9)(x^2 - 9))$

120. a) -1 b) 30

121. Lukujen tulo on 1.

122. a) $(x + 1)(x - 1)$

b) $(x + 5)(x - 5)$

c) $(t + 10)(t - 10)$

d) $10(t + 1)(t - 1)$

123. a) $t - 2$ (Osoittajalla ja nimittäjällä on yhteinen tekijä $t + 2$.)

b) $\frac{1}{t + 3}$ (Osoittajalla ja nimittäjällä on yhteinen tekijä $t - 3$.)

c) $5(t + 1) = 5t + 5$ (Osoittajalla ja nimittäjällä on yhteinen tekijä $t - 1$.)

124. a) Pieneni 625 cm^2 (Ikkunan korkeus ja leveys eivät ole tiedossa, joten ratkaisussa on käytettävä kirjaimia. Jos korkeus ja leveys alun perin olivat $a \text{ cm}$, niin vanha pinta-ala on a^2 ja uusi pinta-ala $(a + 25)(a - 25)$.)

b) Ei muuttunut.

125. a) $-x - 4$ b) $x^2 - 4$

c) $-2x^2 + x + 8$

126. a) $x^3 - \frac{1}{x}$ b) $x^8 - 1$

127. a) 1001 $((501 + 500)(501 - 500))$

b) 2000 c) $\frac{142}{136} = \frac{71}{68}$ d) $\frac{1}{99}$

128. a) 9 991 $((100 + 3)(100 - 3))$

b) 2 499 c) 8 084

129. a) $x^2 - 64$ b) $3x^2 - 300$

c) $5x^2 - \frac{1}{5}$

130. a) $36x^2 - 25$ b) $12x^2 + 7x - 12$

c) $9x^2 - 16$

131. a) $25a^4 - 16b^2$

b) $1 - 81a^2b^4$

c) $a^4 - b^4$

132. a) $t^4 - 100$ b) $1 - 25t^6$

c) $36t^3 - 64t$

133. a) $(x + 3)(x - 3)$

b) $5(x + 2)(x - 2)$

c) $x(x + 4)(x - 4)$

134. a) $\frac{x+3}{5}$ (Supistuu osoittajan ja nimittäjän yhteisellä tekijällä $x-3$.)

b) $\frac{x}{x+1}$ (Supistuu osoittajan ja nimittäjän yhteisellä tekijällä $x-1$.)

c) $\frac{x-1}{x+1}$ (Supistuu osoittajan ja nimittäjän yhteisellä tekijällä $x+1$.)

135. a) $(x+1)(x-1)(x^2+1)$

b) $x(x+1)(x-1)(x^2+1)$

136. a) $-4x^2+32$

b) $-x^3+15x$

137. a) $1+x-x^2=-x^2+x+1$

b) $1-x^2=-x^2+1$

c) $1-x+x^3=x^3-x+1$

138. a) $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$ b) $\frac{5\sqrt{3}-5}{2}$

c) Jos nimittäjä on summa, lavennetaan samojen lukujen erotuksella. Jos nimittäjä on erotus, lavennetaan samojen lukujen summalla. Nimittäjäksi tulee lukujen neliöiden erotus, joten neliöjuuri häviää nimittäjästä.

d) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$ ja $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

139. a) 2^{200} b) $x^2 - \frac{1}{x^2}$

140. $-\frac{2}{3}$

141. a) Merkitään lukua esimerkiksi n . Tällöin $n^3 - n = n(n+1)(n-1)$, missä $n-1$, n ja $n+1$ ovat kolme peräkkäistä kokonaislukua.
b) a-kohdan perusteella luku on kolmen peräkkäisen kokonaisluvun tulo. Kolmesta peräkkäisestä kokonaisluvusta ainakin yksi on jaollinen kahdella ja yksi jaollinen kolmella.

142. $n^4 - 1 = (n+1)(n-1)(n^2+1)$

143. a) $\frac{1}{16\,777\,217} \quad \left(\frac{1}{2^{24}+1}\right)$

b) Jos n on parillinen, niin $n = 2k$, missä k on kokonaisluku, ja
 $2^n - 1 = 2^{2k} - 1 = (2^k + 1)(2^k - 1)$.

144. Kun lauseke lavennetaan summalla $\sqrt{10\,001} + 100$, lauseke tulee muotoon

$3(\sqrt{10\,001} + 100)$. Sijoituksella

$\sqrt{10\,001} \approx 100$ saadaan likiarvo 600, joka on neljän numeron tarkkuudella oikea.

145. Kun lauseke lavennetaan summalla

$198 + 140\sqrt{2}$, lauseke tulee muotoon

$\frac{400}{198 + 140\sqrt{2}}$. Sijoituksella $\sqrt{2} \approx 1,4$ saatu tulos on nyt kahden numeron tarkkuudella oikea.

Summan neliö ja erotuksen neliö

146. a) $a^2 + 8a + 16$

b) $x^2 + 2x + 1$

c) $x^2 + 20x + 100$

147. a) $x^2 - 10x + 25$

b) $x^2 - 2x + 1$

c) $t^2 - 4t + 4$

148. a) $16s^2 + 24s + 9$

b) $36t^2 - 48t + 16$

c) $25x^2 - 20x + 4$

149. a) $a^8 - 2a^4 + 1$

b) $16x^4 + 24x^2 + 9$

c) $25a^6 - 20a^3b^2 + 4b^4$

150. a) $12x^2 + 60x + 75$

b) $x^3 + 14x^2 + 49x$

151. a) $a^2 - a + \frac{1}{4}$

b) $a^2 + 3a + \frac{9}{4}$

c) $a^4 - 5a^2 + \frac{25}{4}$

d) $a^4 - \frac{1}{4}$

- 152.** a) $x^2 - 10x + 25$ (Voidaan laskea erotuksen neliön kaavalla, sillä $-x + 5 = 5 - x$.)
 b) $t^2 + 6t + 9$ (Voidaan laskea summan neliön kaavalla: Koska luvun ja vastaluvun neliöt ovat yhtä suuret, niin $(-t - 3)^2 = (t + 3)^2$.)
 c) $9 - s^2 = -s^2 + 9$ (Voidaan laskea summan ja erotuksen tulo kaavalla, sillä $(-s + 3)(s + 3) = (3 - s)(3 + s)$.)

153. a) $3 + 2\sqrt{2}$ b) $177 - 72\sqrt{6}$

154. a) $x^3 - 3x - 2$ b) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

155. a) $x = 0$ b) $x = 5$

156. a) $+6$ ja $+36$ b) -8 ja $+64$
 c) $-\frac{3}{2}$ ja $+\frac{9}{4}$ d) $+\frac{1}{2}$ ja $+\frac{1}{4}$

157. Merkitään lukuja m ja n .
 Tällöin $(m - n)^2 + 4mn = (m + n)^2$.

158. a) $x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$ b) $9x^2 + 6 + \frac{1}{x^2}$
 c) $x^4 - x + \frac{1}{4x^2}$

- 159.** a) Neliö, jonka sivun pituus on $a + b$, muodostuu kahdesta neliöstä, joiden pinta-alat ovat a^2 ja b^2 , sekä kahdesta suorakulmiosta, joiden molempien pinta-ala on ab .
 b) Neliö, jonka sivun pituus on $a - b$ saadaan niin, että neliöstä, jonka pinta-ala on a^2 vähennetään kaksi suorakulmiota, joiden molempien pinta-ala on ab , ja erotukseen lisätään kahteen kertaan vähennetty suorakulmion yhteisenä osana oleva neliö, jonka pinta-ala on b^2 .

160. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$,
 Trinomin neliö on termien neliöiden summa lisättynä termien kaksinkertaisilla tuloilla.
 a) $x^2 + y^2 + 25 + 2xy + 10x + 10y$
 b) $x^4 + x^2 + 9 - 2x^3 + 6x^2 - 6x$
 $= x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 6x + 9$

161. a) $144 - 24x + x^2$
 b) $s^2 + 7s + \frac{49}{4}$
 c) $16x^2 - 40x + 25$
 d) $25x^{10} + 60x^5 + 36$

162. a) $9a^2 + 6ab + b^2$
 b) $1 - 8ab + 16a^2b^2$
 c) $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$
 d) $12a^2 - 12ab + 3b^2$

163. a) $-12x$ b) $2x - 2$
 c) $-2x^2 + 9x - 8$

- 164.** a) $t^2 - 6t + 9$ (Voidaan laskea erotuksen neliön kaavalla, sillä $-3 + t = t - 3$.)
 b) $t^2 + 10t + 25$ (Voidaan laskea summan neliön kaavalla, sillä vastapolynomeilla $-5 - t$ ja $5 + t$ on sama neliö.)
 c) $1 - t^2$ (Voidaan laskea summan ja erotuksen tulo kaavalla.)
 d) $-t^2 - 2t - 1$ (Voidaan laskea summan neliön kaavalla.)
 e) $1 - t^2$ (Voidaan laskea summan ja erotuksen tulo kaavalla.)

165. a) $4 - 2\sqrt{3}$ b) $13 + 2\sqrt{42}$

166. a) $8 - 12t + 6t^2 - t^3$
 b) $2 - 4t + 4t^2 - t^3$

167. a) $x = \frac{3}{2}$ b) $x = -4$

(a-kohdassa ei välttämättä tarvitse suorittaa neliöön korottamista, sillä voidaan päätellä:

$(x - 1)^2 = (x + 2)^2$, kun $x - 1 = x - 2$ tai kun $x - 1 = -(x - 2)$. Käytettiin siis reaalityyppien ominaisuutta: lukujen neliöt ovat yhtä suuret täsmälleen silloin, kun luvut ovat yhtä suuret tai toistensa vastaluvut, eli $a^2 = b^2$ täsmälleen silloin, kun $a = b$ tai $a = -b$.)

168. a) $x < \frac{1}{2}$ b) $x > -\frac{9}{2}$

169. välillä $]-\infty, -\frac{3}{2}[$ olevilla luvuilla
(Ratkaistaan epäyhtälö $(x+3)^2 < x^2$.)

170. a) $a = 81$, binomin $x + 9$ neliö
b) $a = 16$, binomin $x - 4$ neliö
c) $\frac{25}{4}$, binomin $x - \frac{5}{2}$ neliö

171. a) 1002 ja 1003 (Jos n on pienempi luvusta, saadaan yhtälö $(n+1)^2 - n^2 = 2005$.)
b) Jokainen pariton kokonaisluku on muotoa $2n+1$, missä n on kokonaisluku. Luku $2n+1$ on lukujen $n+1$ ja n neliöiden erotus.

172. a) Koska $(2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}$ ja $2 - \sqrt{3} \approx 0,27 > 0$, niin luku $2 - \sqrt{3}$ on luvun $7 - 4\sqrt{3}$ neliöjuuri.
a) Ei ole, sillä luku $1 - \sqrt{3}$ on negatiivinen.
b) On, sillä $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 5 - 2\sqrt{6}$ ja luku $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ on epänegatiivinen.

173. a) $\frac{1}{a+b}$ (Nimittäjä on $(a+b)^2$, joten lauseke supistuu osoittajan ja nimittäjän yhteisellä tekijällä $a+b$.)
b) $\frac{a+b}{a-b}$ (Supistuu osoittajan ja nimittäjän yhteisellä tekijällä $a-b$.)
c) $\frac{3}{x+3}$ (Supistuu osoittajan ja nimittäjän yhteisellä tekijällä $x+3$.)

174. 7

175. a) $a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}$
b) $38\frac{1}{36}$ ja $83\frac{1}{81}$
c) 23

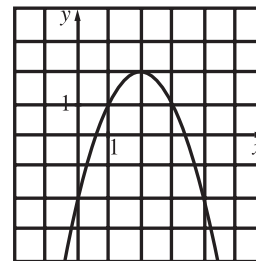
176. a) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
b) $x^3 + 15x^2 + 75x + 125$ ja $t^3 - 3t^2 + 3t - 1$
c) $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
d) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ ja $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$

177. a) Viides rivi on 1 5 10 10 5 1, kuudes alkaa 1 6 15 jne.
b) $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
c) $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$,
 $x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64$

Toisen asteen polynomifunktio ja toisen asteen yhtälö

178. a) On, aukeaa ylöspäin.
b) Ei ole. (Kuvaaja on suora.)
c) Ei ole. (Kolmannen asteen polynomifunktioiden kuvaajiin tutustutaan kurssissa Derivaatta.)
d) On, aukeaa alaspäin.

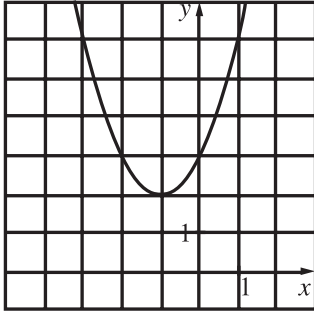
179.



Huippu on pisteessä (2, 2).

- a) Kaksi juurta, likiarvot 0,6 ja 3,4.
b) Funktion arvot ovat negatiivisia, kun (likimääräisesti) $x < 0,6$ tai $x > 3,4$.
Funktion arvot ovat positiivisia, kun $0,6 < x < 3,4$.

180.



Huippu on pisteessä $(-1, 2)$.

- a) Ei yhtään juurta.
 b) Funktio ei saa lainkaan negatiivisia arvoja. Funktion arvot ovat positiivisia kaikilla muutujan x reaaliarvoilla.

181.

- a) $x = 6$ tai $x = -6$
 b) $x = 2\sqrt{3}$ tai $x = -2\sqrt{3}$
 ($\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$)
 c) $x = 0$
 d) Ei juuria.
 e) $x = 0$ (Yhtälö $-4x^2 = 0$.)

182.

- a) $x = 4$ tai $x = -4$
 b) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ tai $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

183.

Muuttujan arvoilla 2 ja -2 . Kun $t = 2$, molempien funktioiden arvo on 9 , ja kun $t = -2$, funktioiden arvo on 13 .

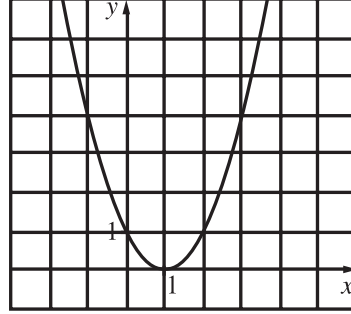
184.

- a) Mikä tahansa lukua 3 suurempi d :n arvo kelpaa.
 b) $d = 3$, juuri on 0 .
 c) Mikä tahansa lukua 3 pienempi d :n arvo kelpaa.

185.

- a) noin pisteessä $(3,5; -4,7)$
 b) noin $-0,4$ ja $7,4$
 c) $0,3x^2 - 2,1x - 1 < 0$, kun (likimääräisesti) $-0,4 < x < 7,4$, ja $0,3x^2 - 2,1x - 1 > 0$, kun (likimääräisesti) $x < -0,4$ tai $x > 7,4$.

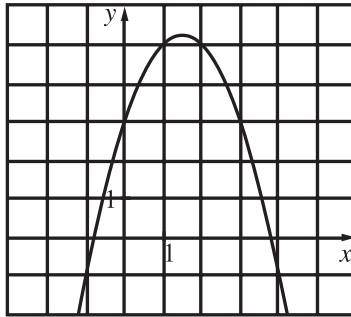
186.



Huippu on pisteessä $(1, 0)$.

- a) Yksi juuri, $x = 1$.
 b) Funktio $f(x) = x^2 - 2x + 1$ ei saa lainkaan negatiivisia arvoja. Funktion arvot ovat positiivisia, kun $x \neq 1$.

187.



x -koordinaatti $1,5$,
 y -koordinaatti $f(1,5) = 5,25$

- a) kaksi juurta, likimain $-0,8$ ja $3,8$
 b) Funktion arvot ovat negatiivisia, kun (likimääräisesti) $x < -0,8$ tai $x > 3,8$. Funktion arvot ovat positiivisia, kun $-0,8 < x < 3,8$.

188.

- a) $\frac{3}{2}$ ja $-\frac{3}{2}$ b) ei nollakohtia

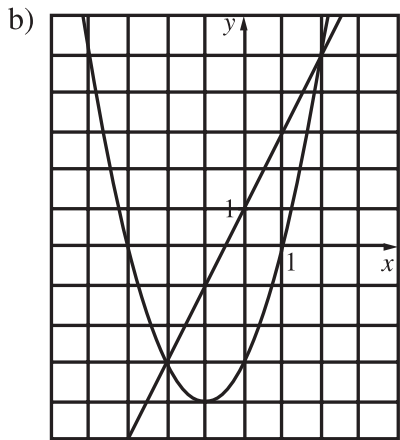
189.

- a) $x = 2\sqrt{2}$ tai $x = -2\sqrt{2}$
 b) $x = 1$ tai $x = -1$
 c) $x = \sqrt{2}$ tai $x = -\sqrt{2}$

190.

- a) $k < 4$ b) $k = 4$ c) $k > 4$

191. a) Muuttujan arvoilla -2 ja 2 , funktioiden arvot vastaavasti -3 ja 5



$f(x) > g(x)$, kun $x < -2$ tai $x > 2$,

$f(x) < g(x)$, kun $-2 < x < 2$

($f(x) > g(x)$, kun funktion f kuvaaja on funktion g kuvaajan yläpuolella, ja $f(x) < g(x)$, kun funktion f kuvaaja on funktion g kuvaajan alapuolella.)

192. a) noin pisteessä $(3,2; -1,9)$
 b) Ei juuria.
 c) Epäyhtälö $-0,5x^2 + 3,2x - 7 < 0$ toteutuu kaikilla muuttujan x reaaliarvoilla. Epäyhtälö $-0,5x^2 + 3,2x - 7 > 0$ ei toteudu millään muuttujan x reaaliarvoilla.
193. a) $x = 3$ tai $x = -3$
 b) $x = 7$ tai $x = 1$ ($x - 4 = 3$ tai $x - 4 = -3$)
194. a) $x = \sqrt{7}$ tai $x = -\sqrt{7}$
 b) $x = 2 + \sqrt{7}$ tai $x = 2 - \sqrt{7}$
 ($x - 2 = \sqrt{7}$ tai $x - 2 = -\sqrt{7}$)
 c) $x = 3$ tai $x = -5$
195. a) $x = 6$ tai $x = 4$
 ($x - 5 = 1$ tai $x - 5 = -1$)
 b) $x = 5$ ($x - 5 = 0$)
 c) Ei juuria.

196. a) $x = \frac{1}{3}$ tai $x = -1$

($3x + 1 = 2$ tai $3x + 1 = -2$)

b) $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ tai $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

($2x - 1 = \sqrt{5}$ tai $2x - 1 = -\sqrt{5}$)

197. a) $x = 2$ tai $x = -8$ ($(x + 3)^2 = 25$)

b) $x = 1 + \sqrt{2}$ tai $x = 1 - \sqrt{2}$ ($(x - 1)^2 = 2$)

c) $x = 2$ ($(x - 2)^2 = 0$)

d) $x = \frac{3}{2}$ tai $x = -\frac{5}{2}$ ($(2x + 1)^2 = 16$)

198. a) $x = -1$ tai $x = -5$ (Lisätään luku 9, jolloin saadaan yhtälö $(x + 3)^2 = 4$.)

b) $x = 1 + \sqrt{5}$ tai $x = 1 - \sqrt{5}$ (Lisätään luku 1, jolloin saadaan yhtälö $(x - 1)^2 = 5$.)

c) $x = -2 + \sqrt{7}$ tai $x = -2 - \sqrt{7}$
 ($(x + 2)^2 = 7$)

d) $x = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ tai $x = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$

($(2x - 1)^2 = 2$)

199. a) $x = 7$ tai $x = -1$ (Yhtälön $x^2 - 6x = 7$ molemmille puolille lisätään luku 9, jolloin saadaan yhtälö $(x - 3)^2 = 16$.)

b) $x = 1$ tai $x = -5$ ($(x + 2)^2 = 9$)

c) $x = 4 + \sqrt{3}$ tai $x = 4 - \sqrt{3}$ ($(x - 4)^2 = 3$)

200. a) $x = 1 + \sqrt{2}$ tai $x = 1 - \sqrt{2}$

b) Ei juuria.

c) $x = 3$ tai $x = -23$

201. a) $x = \frac{1 + \sqrt{7}}{2}$ tai $x = \frac{1 - \sqrt{7}}{2}$

(Yhtälön $4x^2 - 4x = 6$ molemmille puolille lisätään luku 1, jolloin saadaan yhtälö $(2x - 1)^2 = 7$.)

b) $x = 1$ tai $x = -\frac{5}{3}$ ($(3x + 1)^2 = 16$)

202. a) $x = 4$ tai $x = -1$ ($(x - \frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$)

b) $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ tai $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

$((x + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4})$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava

203. a) $x = 2$ tai $x = -3$ (Ratkaisukaavaan sijoitetaan $a = 1$, $b = 1$ ja $c = -6$.)

b) $x = 1$ tai $x = -\frac{1}{2}$ (Ratkaisukaavaan sijoitetaan $a = 2$, $b = -1$ ja $c = -1$.)

204. a) $x = 0$ tai $x = -\frac{4}{3}$

b) $s = \frac{1}{3}$ tai $s = 2$ (Kun kaikki termit siirretään vasemmalle ja yhtälö kerrotaan luvulla -1 , saadaan yhtälö $3s^2 - 7s + 2 = 0$.)

205. a) $y = \frac{3}{2}$ b) Ei juuria.

206. a) $y = -1 + \sqrt{5}$ tai $y = -1 - \sqrt{5}$

b) $x = \frac{3 + \sqrt{6}}{3}$ tai $x = \frac{3 - \sqrt{6}}{3}$

(Kun yhtälön termit siirretään vasemmalle puolelle ja yhtälö kerrotaan luvulla -1 , saadaan yhtälö $3x^2 - 6x + 1 = 0$.)

207. Luvut ovat 44 ja 45, seuraava vuosi on 2070. (Yhtälön $x(x + 1) = 1980$ juuret ovat 44 ja -45 . Luvut x ja $x + 1$ ovat luonnollisia lukuja, kun $x = 44$.)

208. a) $x = \frac{2}{3}$ tai $x = -\frac{1}{6}$

(Kun yhtälö kerrotaan luvulla 18, saadaan yhtälö $18x^2 - 9x - 2 = 0$.)

b) $y = -2 + \sqrt{6}$ tai $y = -2 - \sqrt{6}$ (Yhtälö kerrotaan luvulla 8.)

209. a) $y = 2 + \sqrt{3}$ tai $y = 2 - \sqrt{3}$

(Jos yhtälö jaetaan luvulla 50, saadaan yhtälö $x^2 - 4x + 1 = 0$.)

b) Ei juuria.

210. a) $y = 2$ tai $y = -3$ (Yhtälöllä on määrittelyehto $y \neq 0$. Kun yhtälö kerrotaan y^2 :lla, saadaan yhtälö $y^2 + y = 6$.)

b) $x = -8$ tai $x = 9$ (Yhtälöllä on määrittelyehto $x \neq 0$.)

211. a) $x = 1$ tai $x = 16$ (Yhtälöllä on määrittelyehto $x \neq 4$. Kertomalla ristiin tai kertomalla yhtälön molemmat puolet nimittäjien tulolla $9(x - 4)$, saadaan yhtälö $(x - 4)^2 = 9x$.)

b) $x = \frac{1}{2}$ tai $x = -3$ (Määrittelyehto $x \neq -1$.)

212. a) $x = 8$ tai $x = -2$

(Neliöönkorotuksen ja ratkaisukaavan käytön sijasta voidaan myös päätellä:

$(x - 3)^2 = 25$, kun $x - 3 = 5$ tai $x - 3 = -5$.)

b) $x = -\frac{1}{3}$ (Neliöönkorotuksen ja ratkaisukaavan käytön sijasta voidaan päätellä:

$(3x + 1)^2 = 0$, kun $3x + 1 = 0$.)

213. a) $x = -3$ tai $x = -\frac{1}{5}$

(Yhtälön molemmilla puolilla on neliö, joten yhtälö voidaan ratkaista myös ilman neliöönkorotusta ja ratkaisukaavaa purkamalla se kahdeksi ensimmäisen asteen yhtälöksi seuraavasti: $(2x - 1)^2 = (3x + 2)^2$, kun $2x - 1 = 3x + 2$ tai $2x - 1 = -(3x + 2)$.)

Lukujen neliöt ovat nimittäin yhtä suuret täsmälleen silloin, kun luvut ovat yhtä suuret tai toistensa vastaluvut:

$a^2 = b^2$, kun $a = b$ tai $a = -b$.)

b) $x = \frac{1}{7}$ tai $x = 1$ (Korotetaan neliöön ja

käytetään ratkaisukaavaa. Voidaan myös päätellä: $(1 - 4x)^2 = (3x)^2$, kun $1 - 4x = 3x$ tai $1 - 4x = -3x$.)

214. $x = -2$ tai $x = -1$ tai $x = 0$ tai $x = 1$
(Yhtälö toteutuu, kun $x^2 + x + 1 = 2x + 1$ tai $x^2 + x + 1 = -(2x + 1)$.)

215. $a = -2$, toinen juuri on $x = -6$.

216. a) $x = 1$ tai $x = 3$
b) $x = \frac{2}{3}$ tai $x = -3$

217. a) $t = -3$ tai $t = -5$
b) Ei nollakohtia.

218. a) $x = \frac{1}{9}$ tai $x = -1$
b) $x = 2 + \sqrt{3}$ tai $x = 2 - \sqrt{3}$

219. a) Arvoilla 0 ja 6.
b) Arvolla 3.

220. Arvoilla $\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$ ja $\frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$.

221. a) $x = \frac{3}{4}$ tai $x = -\frac{1}{3}$
b) $x = 1 + \sqrt{6}$ tai $x = 1 - \sqrt{6}$

222. a) $x = 6$ tai $x = 2$
b) $x = 3$ tai $x = \frac{3}{2}$

223. $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ tai $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

224. a) $x = \frac{2}{5}$ tai $x = -2$

(Neliöönkorotuksen ja ratkaisukaavan käytön sijasta voidaan myös päätellä: $(5x + 4)^2 = 36$, kun $5x + 4 = 6$ tai $5x + 4 = -6$.)

b) Ei juuria. (Voidaan päätellä suoraan: luvun neliö ei koskaan ole negatiivinen.)

c) $x = -\frac{3}{2}$ tai $x = \frac{7}{4}$

(Korotetaan neliöön ja käytetään ratkaisukaavaa tai päätellään: $(3x - 2)^2 = (x - 5)^2$, kun $3x - 2 = x - 5$ tai $3x - 2 = -(x - 5)$.)

225. $x = -3$ tai $x = -2$ tai $x = 5$
(Yhtälö toteutuu, kun $x^2 - 3x - 17 = x^2 - x - 13$ tai $x^2 - 3x - 17 = -(x^2 - x - 13)$.)

226. On, sivujen 74 ja 75 muodostama aukeama.

227. Arvoilla $2 + \sqrt{2}$ ja $2 - \sqrt{2}$.
(Yhtälö $(x - 1)(x - 3) = 1$.)

228. a) 29 sekunnin ja 170 sekunnin kuluttua
b) 100 sekunnin kuluttua
c) 200 sekunnin kuluttua

229. a) $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ tai $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$
b) $x = \frac{3}{\sqrt{3}}$ ($= \sqrt{3}$) tai $x = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$ ($= -\frac{\sqrt{3}}{6}$)

(Vastausten jälkimmäisiin muotoihin päästään laventamalla nimittäjässä olevalla neliöjuurella.)

230. 76 (Yhtälö $x^2 = x + 5700$.)

231. $a = 1$, arvoilla $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ ja $x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$

232. Arvoilla $a = 2$ ja $a = -1$. Kun $a = 2$, toinen juuri on $x = -\frac{1}{2}$, kun $a = -1$, toinen juuri on $x = 1$.

233. Kun yhtälöön sijoitetaan $x = -1$ saadaan $1 - (a^2 + 1) + a^2 = 0$ eli tosi yhtälö $0 = 0$. Toinen juuri on -5 , kun $a = \sqrt{5}$ tai $a = -\sqrt{5}$.

234. a) $x = -1$ tai $x = 1 - a$
(Yhtälön vakiotermi on $a - 1$.)
b) $x = 1$ tai $x = -a$
(Yhtälön ensimmäisen asteen termin kerroin on $a - 1$.)

Sovelluksia

235. 0,62 m (Yhtälö $\frac{x}{1} = \frac{1}{1+x}$, josta ristiin kertomalla saadaan yhtälö $x^2 + x - 1 = 0$.)
236. 30 m ja 50 m
237. 44 m
(Jos leveys on x metriä, niin $x(x+4) = 117$. Tehtävässä kysyttiin suorakulmion piiriä.)
238. 49 (Jos alkuperäisessä laatoituksessa oli x laattaa kumpaankin suuntaan, niin $(x+2)(x+4) = 99$.)
239. 4,0 m
240. 9,0 m (Jos x on menetetyn kaistaleen leveys metreinä, niin $(27-x)(36-x) = \frac{1}{2} \cdot 27 \cdot 36$.)
241. 64 cm
242. 203 m²
243. 20,9 m (Jos r on puoliympyrän säde, niin $\frac{1}{2}\pi r^2 + 30 \cdot 2r = 800$.)
244. 2,41 m (Jos kyljen pituus on x metriä, niin kolmion piiri on $2x + 1$ metriä.)
245. 160 m:llä köyttä ei ole mahdollista aidata 1 700 m²:n suuruista suorakulmion muotoista aitausta.
(Yhtälöllä $x(80-x) = 1700$ ei ole juuria.)
246. Jokea vastaan kohtisuora sivu 25 m ja joen suuntainen sivu 64 m, tai jokea vastaan kohtisuora sivu 32 m ja joen suuntainen sivu 50 m.
247. 2,0 cm
248. 71 cm (Jos ikkunan korkeus on x dm, niin ikkunan leveys on $x + 2$ dm.)

249. pinta-ala 2 000 m² ja rantaviiva 40 m tai pinta-ala 1 856 m² ja rantaviiva 58 m
250. 4,4 cm (Olkoon x sauman leveys metreinä. Saumojen kokonaispinta-ala saadaan, kun koko laatoitetun alueen pinta-alasta $(1,5 + 2x)(2,5 + 4x)$ vähennetään laattojen pinta-ala $15 \cdot 0,5 \cdot 0,5$.)
251. 15 m (Olkoon köyden pituus x metriä. Alue muodostuu suorakulmiosta, jonka sivut ovat 28 ja $2x$, ja kahdesta puoliympyrästä, joiden säde on x .)
252. 7,5 % (Olkoon k kerroin, jolla pääoma korkoa lisättäessä tulee kerrotuksi. Vuoden 2005 alussa tilillä oli ennen uutta talletusta $k \cdot 800 = 800k$ euroa ja vuoden 2006 alussa $k(800k + 800)$ euroa.)
253. a) 29 km/h b) 92 km/h
(Olkoon v (km/h) kysytty nopeus. Reaktioaikana kuljettu matka on $1,5 \cdot \frac{1000v}{3600} = \frac{5}{12}v$ metriä ja jarrutusmatka on $0,0072v^2$ metriä.)
254. 120 m (Voidaan ensiksi ratkaista putoamiseen kulunut aika t sekunteina: Kallion korkeus on toisaalta $4,9t^2$ ja toisaalta $340(5,2 - t)$.)

Toisen asteen epäyhtälö

255. a) $-3 < x < 1$
b) $x < 0$ tai $x > 2$
256. $x < -6$ tai $x > 1$ (Nollakohdat ovat -6 ja 1 , ja kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.)
257. a) $-4 < x < 4$ (Nollakohdat ovat -4 ja 4 , ja kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.)
b) $x < 2$ tai $x > 3$ (Nollakohdat 2 ja 3 , ja kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.)
258. a) $x < -4$ tai $x > 3$
b) $-1 < x < 0$ (Tutkitaan, millä muuttujan arvoilla funktion $x^2 + x$ arvot ovat negatiivisia.)

- 259.** a) $-5 < x < 5$ (Tutkitaan, millä muuttujan arvoilla funktion $x^2 - 25$ arvot ovat negatiivisia.)
 b) $x \leq -6$ tai $x \geq 6$ (Tutkitaan funktion $x^2 - 36$ merkkejä.)
 c) Epäyhtälö toteutuu kaikilla muuttujan arvoilla. (Voidaan päätellä suoraan: Koska luvun neliö on aina epänegatiivinen, niin $x^2 > -4$ kaikilla x .)
- 260.** a) $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$
 b) Epäyhtälö toteutuu kaikilla muuttujan arvoilla. (Funktiolla $x^2 - x + 3$ ei ole nollakohtia ja kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.)
- 261.** a) $x \neq -3$
 b) Epäyhtälö ei toteudu millään muuttujan arvoilla. (Funktiolla $-x^2 + 10x - 25$ on yksi nollakohta ja kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.)
- 262.** Funktiolla g ei ole nollakohtia ja sen kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Siis kuvaaja on kokonaan x -akselin alapuolella, joten funktion kaikki arvot ovat negatiivisia.
- 263.** a) $x < -1$ tai $x > 7$
 b) $-4 < x < -\frac{2}{3}$
 (On suoritettava neliöönkorotus.)
- 264.** Vähintään 5 m ja enintään 20 m.
 (Jos aitauksen leveys on x m, niin tulee olla $x(25 - x) \geq 100$.)
- 265.** Enintään 3 m tai vähintään 5 m, mutta alle 8 m.
 (Jos taulun korkeus on x metriä, niin tulee olla $x(8 - x) \leq 15$ ja $0 < x < 8$.)
- 266.** a) arvoilla 2 ja $\frac{1}{2}$
 b) $\frac{1}{2} < x < 2$
 c) $x < \frac{1}{2}$ tai $x > 2$
- 267.** a) $-\frac{1}{3} < x < 1$ b) $x < \frac{1}{3}$
- 268.** a) $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$
 b) $x < -\frac{7}{3}$ tai $x > \frac{7}{3}$
 c) $x < 0$ tai $x > 1$
- 269.** a) $x = \frac{3}{2}$ b) $x \neq \frac{2}{3}$
- 270.** Epäyhtälö $x^2 - 10x + 34 > x + 3$ eli epäyhtälö $x^2 - 11x + 31 > 0$ toteutuu kaikilla muuttujan arvoilla, sillä funktiolla $x^2 - 11x + 31$ ei ole nollakohtia ja sen kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.
- 271.** a) $x < 0$ tai $x > 1$
 b) $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$
- 272.** a) $\frac{1}{2} < x < 2$
 (Kun epäyhtälö kerrotaan positiivisella luvulla 10, se tulee muotoon $5x - 2(x^2 + 1) > 0$.)
 b) $x \leq 1$ tai $x \geq 3$
 (Kun epäyhtälö kerrotaan positiivisella luvulla 2, se tulee muotoon $4x - (x^2 + 3) \leq 0$.)
- 273.** a) $[-5, 5]$ (määrittelyehto $-5 \leq x \leq 5$)
 b) määrittelyehto $x \leq -\sqrt{5}$ tai $x \geq \sqrt{5}$

274. Funktion f arvot ovat positiivisia, kun

$$x < \frac{-2 - \sqrt{480}}{2} \approx -11,95 \text{ tai}$$

$$x > \frac{-2 + \sqrt{480}}{2} \approx 9,95.$$

Koska $-12 < \frac{-2 - \sqrt{480}}{2}$, arvot ovat positiivisia koko välillä $]-\infty, -12]$.

275. yli 10 m ja alle 15 m

276. Enintään 5 m tai 13 m – 18 m.
($x(18 - x) < 65$ ja $0 < x < 18$)

277. $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ ja 3
(Ratkaistaan toisen asteen epäyhtälö ja selvitetään, mitkä kokonaisluvut ovat ratkaisujoukossa.)

278. Epäyhtälö $10n^2 + 21 > 30n$ toteutuu, kun
 $n < \frac{30 - \sqrt{60}}{20} \approx 1,1$ tai $n > \frac{30 + \sqrt{60}}{20} \approx 1,9$.
Ratkaisujoukossa ovat kaikki kokonaisluvut.

279. a) $-2 < x < 2$
b) $x \leq -\sqrt{2}$ tai $x \geq \sqrt{2}$
c) $-2 < x < 2$
d) $x < -10$ tai $x > 10$
e) $x < 5$
f) $x > -1$

280. a) $3 < x < 5$
(Epäyhtälö toteutuu, kun $-1 < x - 4 < 1$)
b) $x < 2$ tai $x > 8$
c) $x < -2$
(Epäyhtälö toteutuu, kun $2x + 3 < -1$.)
d) $x > \frac{1}{4}$

Diskriminantti

281. a) $D = 64$, kaksi juurta
b) $D = -11$, ei yhtään juurta

282. a) $q < \frac{9}{4}$ b) $q = \frac{9}{4}$

- c) $q \leq \frac{9}{4}$ d) $q > \frac{9}{4}$

(Yhtälön diskriminantti on $9 - 4q$.)

283. $b = 24$ tai $b = -24$

Kun $b = 24$, yhtälö on $36x^2 + 24x + 4 = 0$ ja juuri $x = -\frac{1}{3}$.

Kun $b = -24$, yhtälö on $36x^2 - 24x + 4 = 0$ ja juuri $x = \frac{1}{3}$.

284. $a \leq -2\sqrt{5}$ tai $a \geq 2\sqrt{5}$

(Yhtälö saatetaan ensin perusmuotoon $x^2 - ax + 5 = 0$. Yhtälön diskriminantti on $D = a^2 - 20$. Ratkaistaan toisen asteen epäyhtälö $a^2 - 20 \geq 0$.)

285. a) Yhtälön $x(x - 7) = \sqrt{151}$ diskriminantti on $49 - 4\sqrt{151} \approx -0,15$. Koska diskriminantti on negatiivinen, yhtälö ei toteudu millään muuttujan x arvolla.
b) kahdella

286. $a > 5\frac{1}{3}$

(Funktion g kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten funktio g saa pelkästään positiivisia arvoja, jos sillä ei ole yhtään nollakohtaa.)

287. $-4 \leq p \leq 4$

288. Arvoilla $a = 0$, $a = 1$ ja $a = -4$.

Kun $a = 0$, juuri on $x = -\frac{3}{4}$.

Kun $a = 1$, juuri on $x = -2$.

Kun $a = -4$, juuri on $x = \frac{1}{2}$.

(Kun $a = 0$, yhtälö on ensimmäisen asteen yhtälö $4x + 3 = 0$, jolla on yksi juuri.

Kun $a \neq 0$, niin ratkaistaan, millä a :n arvoilla diskriminantti $4^2 - 4a(a + 3)$ on nolla.)

289. a) Ei yhtään. b) $c \leq \frac{9}{2}$

290. $a \leq -1$ tai $a \geq 1$ (Yhtälö saatetaan ensin perusmuotoon $-4x^2 + 4ax - 1 = 0$.)

291. $q = \frac{1}{2}$, yhteinen piste $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$

292. a) $a \geq -\frac{9}{4}$

b) Ei, sillä a-kohdan nojalla ei ole sellaisia muuttujan arvoja, että $x(x + 3) = -4$.

c) -2 (Pienin kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön $a \geq -\frac{9}{4}$.)

293. $c < -\frac{1}{4}$

(Funktion g kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktio g saa pelkästään negatiivisia arvoja, jos sillä ei ole yhtään nollakohtaa.)

294. $-\frac{1}{9} < a < 0$

295. a) Ei ole.

b) $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ ja $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

c) $a \leq \frac{1}{4}$

296. arvoilla $a = -1$, $a = 3$ ja $a = -\frac{5}{9}$.

Kun $a = -1$, juuri on 1 .

Kun $a = 3$, juuri on -1 .

Kun $a = -\frac{5}{9}$, juuri on 3 .

(Kun $a = -1$, yhtälö on ensimmäisen asteen yhtälö $-4x + 4 = 0$. Kun $a \neq -1$, yhtälö on toisen asteen yhtälö, jonka diskriminantti on $(3a - 1)^2 - 16(a + 1)$.)

297. Yhtälön diskriminantti on

$D = a^2 + 6a + 9 = (a + 3)^2$. Koska luvun neliö on aina epänegatiivinen, niin aina on $D \geq 0$. Siis yhtälöllä on kaikilla a :n arvoilla ainakin yksi juuri. Juuria on yksi, kun $a = -3$.

298. Kun $a \neq 0$, yhtälö on toisen asteen yhtälö. Yhtälön diskriminantti on $a^2 - 2a + 9$. Funktion $a^2 - 2a + 9$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli ja funktiolla ei ole nollakohtia. Siis diskriminantti $a^2 - 2a + 9$ on kaikilla a :n arvoilla ($a \neq 0$) positiivinen.

Tulon nollasääntö

299. a) $x = -3$ tai $x = 2$

b) $x = 6$ tai $x = -\frac{3}{2}$

c) $x = -\frac{5}{2}$ tai $x = -\frac{1}{3}$

300. a) $x = 0$ tai $x = 2$

b) $y = 0$ tai $y = -\frac{1}{4}$ (Yhtälö $y(4y + 1) = 0$.)

c) $t = 0$ tai $t = \frac{1}{3}$

(Yhtälö $12t^2 - 4t = 0$ eli $t(12t - 4) = 0$.)

301. a) $x = 0$ tai $x = 1$

b) $x = 0$ tai $x = -1$

302. a) $-\frac{1}{2} < x < 0$

b) $x < -\frac{1}{3}$ tai $x > 0$

303. a) $x = -2$ tai $x = -1$ tai $x = 5$

b) $x = 0$ tai $x = -\frac{3}{4}$ tai $x = \frac{1}{5}$

304. a) $x = 0$ tai $x = -1$ tai $x = 2$ tai $x = -4$, seitsemannen asteen yhtälö.

b) $x = 0$ tai $x = \frac{5}{3}$ tai $x = -\frac{6}{5}$, kuudennen asteen yhtälö

305. a) Mikä tahansa yhtälö $a(x-5)(x+2)$, missä $a \neq 0$.

b) $f(x) = -\frac{1}{3}(x-5)(x+2)$

306. $P(x) = -3x(x + \frac{1}{3}) = -3x^2 - x$

307. $f(x) = 3(x+5)^2$

308. $Q(x) = \frac{1}{6}x(x+1)(x-1)(x-2)$

309. a) Ei päde, sillä tulo voi olla 1, vaikka kumpikaan tulon tekijöistä ei ole 1, esimerkiksi $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

b) $x = \frac{1 + \sqrt{53}}{2}$ tai $x = \frac{1 - \sqrt{53}}{2}$

c) Ei päde, sillä jos $n \neq 0$, niin tulo voi olla n , vaikka kumpikaan tulon tekijöistä ei ole n , esimerkiksi $2 \cdot \frac{n}{2} = n$ ja $3 \cdot \frac{n}{3} = n$.

310. a) $x = -5$ tai $x = 3$

b) $x = -7$ tai $x = -\frac{7}{2}$

c) $x = 0$ tai $x = -\frac{1}{32}$

d) $x = 0$ tai $x = \frac{1}{3}$

311. a) 0 ja $-\frac{1}{8}$ b) 0 ja -12

312. a) $\mathbb{R} \setminus \{-5, 0\}$

(määrittelyehto $x \neq -5$ ja $x \neq 0$)

b) $\mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{6}\}$

(määrittelyehto $x \neq 0$ ja $x \neq \frac{1}{6}$)

313. a) $x = 0$ tai $x = 4$

b) $x = 0$ tai $x = -\frac{4}{3}$

314. a) $x = \frac{4}{3}$ tai $x = -\frac{1}{2}$ tai $x = -7$ tai $x = -9$, neljännen asteen yhtälö

b) $x = 0$ tai $x = 5$ tai $x = -3$ tai $x = \frac{1}{4}$, seitsemannen asteen yhtälö

315. $f(x) = 6(x - \frac{1}{2})(x + \frac{2}{3}) = (2x - 1)(3x + 2)$

(Jälkimmäinen muoto saadaan seuraavasti:

$6(x - \frac{1}{2})(x + \frac{2}{3}) = 2(x - \frac{1}{2}) \cdot 3(x + \frac{2}{3}).$)

316. $g(x) = 2(x-3)(x+2)(x+1)$

317. a) $(x+1)(x-3)(x-5) = 0$

b) $(x+1)^2(x-3) = 0$ tai $(x+1)(x-3)^2 = 0$

c) $(x-3)^3 = 0$

Vasemmalle puolelle voi lisätä kertojaksi minä tahansa nollasta eroavan reaali-luvun.

318. Esimerkiksi yhtälö $(x+1)(x-2)^4 = 0$.

319. a) Esimerkiksi $x(x-1)(x-2)(x-3) = 0$.

b) Esimerkiksi $x(x-1)^2(x-2) = 0$.

c) Esimerkiksi $(x-1)^3(x-2) = 0$.

d) Esimerkiksi $(x-1)^4 = 0$.

e) Esimerkiksi $x^4 + 1 = 0$.

320. a) vain jos b) jos ja vain jos c) jos

- 321.** a) P :stä ei seuraa Q , sillä jos kahden luvun tulo on positiivinen, molemmat luvut voivat olla negatiivisia. Q :sta seuraa P , sillä kahden samanmerkkisen luvun tulo on positiivinen. Koska P :stä ei seuraa Q , niin P ja Q eivät ole yhtäpitäviä.
 b) P :stä seuraa Q , sillä jos lukujen tulo on negatiivinen, luvut ovat erimerkkiset. Q :sta seuraa P , sillä jos luvut ovat erimerkkiset, niiden tulo on negatiivinen. Koska P :stä seuraa Q ja Q :sta seuraa P , väitteet P ja Q ovat yhtäpitäviä.
 c) P :stä seuraa Q , sillä jos $x > 3$, niin $x^2 > 9$. Q :sta ei seuraa P , sillä esimerkiksi $(-5)^2 > 9$ mutta -5 ei ole suurempi kuin 3. Koska Q :sta ei seuraa P , väitteet P ja Q eivät ole yhtäpitäviä.

Korkeamman asteen yhtälöitä ja epäyhtälöitä

- 322.** a) $x = 0$ tai $x = 3$ tai $x = -4$
 b) $x = 0$
- 323.** a) $x = 0$ tai $x = -5$ ($x^2(x + 5) = 0$)
 b) $x = 0$
 c) $x = 0$ tai $x = 1$ tai $x = -1$
- 324.** a) $x = 0$ tai $x = \sqrt[4]{6}$ tai $x = -\sqrt[4]{6}$
 b) $x = 0$ tai $x = \sqrt[3]{6}$
- 325.** a) $x < -3$ tai $0 < x < 5$
 b) $x < 0$ tai $0 < x < 6$
- 326.** a) $0 < x < \frac{1}{3}$ tai $x > 1$
 b) $x < -\sqrt{3}$ tai $0 < x < \sqrt{3}$
- 327.** a) $x < -2$ tai $0 < x < 1$
 b) $-2 \leq x \leq 0$ tai $x \geq 4$
- 328.** a) $x > -2$
 b) $-1 < x < 4$
 c) $x < -1$ tai $0 < x < 4$
- 329.** a) $x < -1$ tai $0 < x < 1$
 b) $x < 0$ tai $x > 1$

- 330.** a) luvuilla 0 ja 1 (Yhtälö $x^2 = \frac{x^3 + x}{2}$.)
 b) negatiivisilla luvuilla
- 331.** a) $x = -3$ tai $x = -2$ tai $x = 1$
 ($(x + 3)(x^2 + x - 2) = 0$)
 b) $x = -2$ tai $x = -1$ tai $x = 2$ tai $x = 9$
 ($(x^2 - 4)(x^2 - 8x - 9) = 0$)
- 332.** $a = -2$, muut juuret $x = 0$ ja $x = 4$
- 333.** a) $x = 0$ tai $x = 1$ tai $x = -\frac{1}{3}$
 b) $x = 0$ tai $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ tai $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$
- 334.** a) $x = 0$ tai $x = 1$
 b) $x = 0$ tai $x = 1$ tai $x = -1$
- 335.** $x = \frac{1}{3}$ tai $x = -\frac{1}{3}$ tai $x = 0$ tai $x = -1$
- 336.** a) $0 < x < 2$ tai $x > 5$
 b) $x < -2$ tai $x > 4$
- 337.** a) $-8 < x < 0$ tai $x > 2$
 b) $x < -5$ tai $0 < x < 5$
- 338.** a) $x < 1$ b) $x < \frac{2}{3}$ tai $x > 1$
 c) $-\frac{5}{3} < x < 0$ tai $x > 1$
- 339.** a) $x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ tai $0 < x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
 b) $x < 0$
- 340.** a) luvuilla -2 , 0 ja 1
 (Yhtälö $x = \frac{x^2 + x^3}{2}$.)
 b) Luvuilla, joille pätee $x < -2$ tai $0 < x < 1$.

- 341.** a) $x = 3$ tai $x = 1$
 $((x - 3)(x^2 - 2x + 1) = 0)$
 b) $x = -3$ tai $x = -1$ tai $x = 2$ tai $x = 3$
 $((x^2 - 9)(x^2 - x - 2) = 0)$
- 342.** a) $x = 1$ tai $x = 4$ tai $x = 5$
 $((x - 5)(x(x - 5) + 4) = 0)$
 b) $x = -3$ tai $x = 1$ tai $x = 2$
 $((x - 1)(x(x + 1) - 6) = 0)$
- 343.** $a < 0$ tai $0 < a < \frac{1}{4}$
 (Yhtälöllä on kolme juurta, kun toisen asteen yhtälöllä $x^2 + x + a = 0$ on kaksi nollasta eroavaa juurta.)
- 344.** Koska
 $x^3 + ax^2 + ax - 5x = x(x^2 + ax + a - 5)$,
 tekijän x nollakohta $x = 0$ on aina yhtälön juuri. Toisen asteen yhtälön $x^2 + ax + a - 5 = 0$ diskriminantti $a^2 - 4a + 20$ on positiivinen kaikilla a :n arvoilla, joten yhtälöllä on aina kaksi juurta, joista toinen on 0 , kun $a = 5$. Siis yhtälöllä $x^3 + ax^2 + ax - 5x = 0$ on kolme juurta kaikilla muilla a :n arvoilla paitsi arvolla $a = 5$.
- 345.** Toisen asteen yhtälön $x^2 + ax + a^2 + 1 = 0$ diskriminantti $-3a^2 - 4$ on kaikilla a :n arvoilla negatiivinen, joten funktio $x^2 + ax + a^2 + 1$, jonka kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, saa pelkästään positiivisia arvoja. Siis funktion $f(x) = x(x^2 + ax + a^2 + 1)$ kaikki arvot ovat samanmerkkisiä kuin x .

Nollakohtien ja tekijöiden yhteys

- 346.** a) $(x - 3)(x + 4)$
 b) $(x + 3)(x + 5)$
 c) $6(x - \frac{3}{2})(x + \frac{4}{3})$
 (Tulos voidaan myös sieventää muotoon $(2x - 3)(3x + 4)$, sillä $6(x - \frac{3}{2})(x + \frac{4}{3}) = 2(x - \frac{3}{2}) \cdot 3(x + \frac{4}{3})$.)
- 347.** a) $(x - 3)^2$ b) Polynomi on jaoton.
- 348.** Yhtälöllä $9x^2 + 6x + 1 = 0$ on vain yksi juuri $-\frac{1}{3}$, joka siis on yhtälön kaksoisjuuri.
 $9x^2 + 6x + 1 = 9(x + \frac{1}{3})^2 = (3x + 1)^2$
 (Tuloksen jälkimmäinen muoto saadaan seuraavasti:
 $9(x + \frac{1}{3})^2 = 3^2(x + \frac{1}{3})^2 = (3(x + \frac{1}{3}))^2$.)
- 349.** $x(x + 4)(x - 5)$
- 350.** a) $x - 2$ $(x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2))$
 b) $\frac{x + 7}{5}$ $(x^2 + 5x - 14 = (x - 2)(x + 7))$ ja $5x - 10 = 5(x - 2)$
- 351.** a) $\frac{2x + 1}{x - 3}$ $(2x^2 - 5x - 3 = 2(x - 3)(x + \frac{1}{2}))$
 b) $\frac{x + 2}{x + 3}$
- 352.** $p = 2$, toinen tekijä $x + 5$
 (Polynomilla on tekijä $x - 3$, jos ja vain jos kohta 3 on nollakohta eli $3^2 + p \cdot 3 - 15 = 0$.)

- 353.** $c = -30$, supistettu muoto $3x - 10$
(Polynomi $x + 3$ on polynomin $3x^2 - x + c$ tekijä, jos ja vain jos -3 on nollakohta. Osoittajan tekijöihinjako on:

$$3x^2 - x - 30 = 3(x - \frac{10}{3})(x + 3).$$

- 354.** a) Juuret $x_1 \approx -4,3$, $x_2 \approx 0,4$ ja $x_3 \approx 2,9$.
Muita juuria ei ole.
b) Juuri $x_1 \approx -3,1$ ja mahdollisesti enintään kaksi muuta juurta.

- 355.** a) $-(x + 4)(x - 7)$
b) $12(x + \frac{1}{4})(x - \frac{1}{3}) = (4x + 1)(3x - 1)$
(Vastauksen jälkimmäinen muoto saadaan seuraavasti:

$$12(x + \frac{1}{4})(x - \frac{1}{3}) = 4(x + \frac{1}{4}) \cdot 3(x - \frac{1}{3}).$$

- 356.** a) jaoton b) $12(x - \frac{1}{2})^2 = 3(2x - 1)^2$

- 357.** a) $3(x + 5)(x - 5)$
b) $3x(x + 2)$

- 358.** a) $c = 36$, juuri 6 , $(x - 6)^2$
b) $c = \frac{25}{4}$, juuri $-\frac{5}{2}$, $(x + \frac{5}{2})^2$

(Toisen asteen yhtälöllä on kaksoisjuuri, kun yhtälön diskriminantti on nolla).

- 359.** $\frac{4x-1}{3x+1}$ ($8x^2 - 6x + 1 = 8(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{4})$) ja

$$6x^2 - x - 1 = 6(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{3})$$

- 360.** a) $\frac{x}{x-2}$ b) $\frac{x-6}{x-7}$

- 361.** $a = 1$ tai $a = -3$
Kun $a = 1$, niin $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$.
Kun $a = -3$, niin
 $x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(x - 5)$.

- 362.** $b = 0$ tai $b = -18$

Kun $b = 0$, supistettu muoto on $\frac{x}{x-3}$.

Kun $b = -18$, supistettu muoto on $\frac{x+6}{x+3}$.

(Lauseke supistuu, jos ja vain jos jompikumpi nimittäjän tekijöistä $x + 3$ ja $x - 3$ on osoittajan tekijä.)

- 363.** a) summa -3 ja tulo -10
($a = 1$, $b = 3$ ja $c = -10$)

b) summa 2 ja tulo $\frac{2}{3}$

c) juurten tulo $-\frac{7}{3}$, toinen juuri $-\frac{7}{3}$

d) 1 ja $-\frac{2}{7}$, 1 ja $\frac{4}{5}$

e) Lukujen 19 ja -5 tulo ei ole -100 .

- 364.** $a = 2b$ tai $a = b$ ($b = \frac{a}{2}$ tai $b = a$),

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = (a - 2b)(a - b)$$

$$3a^2 + 5ab - 2b^2 = (a + 2b)(3a - b)$$

- 365.** Luvut osoitetaan yhtälön juuriksi sijoittamalla. Koska kolmannen asteen yhtälöllä on enintään kolme juurta, yhtälöllä ei ole muita juuria.
 $2x^3 - 14x + 12 = 2(x - 1)(x - 2)(x + 3)$

- 366.** $d = 0$, $x(x - 2)(x + 1)$

- 367.** a) Luku 1 on polynomin $x^n - 1$ nollakohta, joten $x - 1$ on tekijä.

b) $164\,916\,223 = 3\,835\,261 \cdot 43$

c) $p^n - 1 = Q(p)(p - 1)$. Koska polynomin $Q(x)$ kertoimet ovat kokonaislukuja, niin $Q(p)$ on kokonaisluku.

Koska $p > 2$, niin luku $p - 1$ ei ole 1 tai $p^n - 1$. Siis luku $p^n - 1$ ei ole alkuluku.

d) Jos n ei ole alkuluku, niin $n = kq$, missä k ja q ovat ykköstä suurempia kokonaislukuja. Tällöin $2^n - 1 = 2^{kq} - 1 = (2^k)^q - 1$. c-kohdan nojalla luku $(2^k)^q - 1$ ei ole alkuluku.

- 368.** $1\,680\,700\,001 = 23\,671\,831 \cdot 71$

(Jos n on pariton, niin polynomilla $x^n + 1$ on tekijä $x + 1$.)

Kompleksiluvut ja yhtälön kompleksijuuret

- 369.** a) summa $-1 + 3i$, erotus $-7 - 7i$
b) summa 8 , erotus $-6i$
- 370.** a) -6 b) $8 - i$
c) 25 (Voidaan käyttää summan ja erotuksen tulon kaavaa.)
d) $9 - 40i$ (Voidaan käyttää erotuksen neliön muistikaavaa.)
- 371.** $z^2 = 2i$, $z^3 = -2 + 2i$, $z^4 = -4$ jne.
- 372.** a) $x = 2i$ tai $x = -2i$
b) $x = \sqrt{3}i$ tai $x = -\sqrt{3}i$
- 373.** $1, -1, i$ ja $-i$
- 374.** Juuret sijaitsevat origokeskisellä 1 -säteisellä ympyrällä 45° :n välein alkaen reaaliakselin luvusta 1 . Juuret ovat likimääräisesti $1, 0,7 + 0,7i, i, -0,7 + 0,7i, -1, -0,7 - 0,7i, -i$ ja $0,7 - 0,7i$. (Juurten tarkat arvot saadaan, kun luku $0,7$ korvataan luvulla $\frac{1}{\sqrt{2}}$.)
- 375.** a) $x = 3 + 2i$ tai $x = 3 - 2i$
b) $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ tai $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
c) $x = -1 + \sqrt{3}i$ tai $x = -1 - \sqrt{3}i$
- 376.** a) $x = 0$ tai $x = 3 + 3i$ tai $x = 3 - 3i$
b) $x = 0$ tai $x = -1 + i$ tai $x = -1 - i$
- 377.** a) $(x + 3i)(x - 3i)$
b) $(x - 4 - i)(x - 4 + i)$
- 378.** a) $(x + 2)(x - 2)(x + 2i)(x - 2i)$
b) $(x + i)^2(x - i)^2$

Korkeamman asteen yhtälöiden ratkaisukaavat

- 379.** a) 1 ja 2 ($A = B = -\frac{1}{3}$)
b) $-1, -1 + 3i$ ja $-1 - 3i$ ($A = 3$ ja $B = -3$)
c) $-0,430, -0,785 + 1,307i$ ja $-0,785 - 1,307i$
- 380.** a) $\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}}$
b) $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$
- 381.** $2,14$ m (Jos x on pystyyn jäänyt osa, niin $x^3 + x = 12$.)

Kertaustehtäviä

- 382.** a) $[-5, 7[$ b) $]-\infty, 8]$
- 383.** a) $\sqrt{10} - 3$
(Luku $\sqrt{10} - 3$ on positiivinen.)
b) $-\sqrt{10} + 5 = 5 - \sqrt{10}$
(Luku $\sqrt{10} - 5$ on negatiivinen.)
- 384.** 78
- 385.** a) 5 ja -5
b) Luvut, jotka toteuttavat kaksoisepäyhtälön $-5 < x < 5$, eli välin $] -5, 5[$ luvut.
c) Luvut, joille pätee $x \leq -5$ tai $x \geq 5$.
- 386.** a) $x > \frac{9}{5}$, ratkaisuväli $] \frac{9}{5}, \infty[$
b) $x \geq 2$, ratkaisuväli $[2, \infty[$
- 387.** a) $x < \frac{1}{2}$ (Kun epäyhtälö kerrotaan positiivisella luvulla 2 , se tulee muotoon $6x - (4x - 1) < 2$.)
b) $x \leq 3$ (Kun epäyhtälö kerrotaan positiivisella luvulla 6 , se tulee muotoon $18 - 3(x - 1) \geq 6x - (3 + x)$.)

- 388.** a) Epäyhtälön toteuttavat kaikki reaaliluvut. (Yhtäpitävä epäyhtälön $3 < 6$ kanssa.)
 b) Epäyhtälöä ei toteuta mikään reaaliluku. (Yhtäpitävä epäyhtälön $-6 > -6$ kanssa.)
 c) Epäyhtälön toteuttavat kaikki reaaliluvut. (Yhtäpitävä epäyhtälön $-6 \geq -6$ kanssa.)
- 389.** vähintään 34 (Epäyhtälö $3x > 1,5x + 50$.)
- 390.** -215 (Suurin kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon $x < -\frac{1500}{7} \approx 214,3$.)
- 391.** $k \geq -\frac{2}{3}$ (Yhtälön juuri on $\frac{1}{3} - k$. Ratkaistaan epäyhtälö $\frac{1}{3} - k \leq 1$.)
- 392.** a) $h(-4) = \frac{1}{25}$ ja $h(0) = \frac{1}{9}$
 b) $h(t) = \frac{1}{(2t+3)^2}$
 c) Määrittelyjoukko $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$. (Ei määritelly, kun $2t+3=0$.)
- 393.** a) $]-\infty, -\frac{7}{5}]$ eli määrittelyehto $x \leq -\frac{7}{5}$
 (Tulee olla $-5x - 7 \geq 0$.)
 b) Määrittelyehto: $-1 \leq x < 3$ tai $x > 3$
 (Tulee olla $x+1 \geq 0$ ja $x-3 \neq 0$.)
 c) $]-1, \infty[$ eli määrittelyehto $x > -1$
 (Tulee olla $x+1 > 0$.)
- 394.** a) Arvot $x > 0$.
 b) $A(x) = 12x + 36 \ ((x+6)^2 - x^2)$
- 395.** a) 0,3 ja 2,2 b)]0,3; 2,2[
 c) -0,2 ja 2,5 d)]-0,2; 2,5[
- 396.** a) $-\frac{3}{4}$ b) 0 c) $-\pi$
 d) $1 - \sqrt{3}$ e) kolme
- 397.** summa $-x^3 - 5x^2 - x - 4$,
 erotus $3x^3 - 3x^2 + 3x - 10$
- 398.** $-x + 8$ (Ensin lasketaan kertolaskut, jolloin saadaan $(3x^2 - \frac{3}{2}x + 4) - (3x^2 - \frac{1}{2}x - 4)$.)
- 399.** a) $6x^2$
 b) $x^3 \quad (3x - (3x - x^3))$
 c) $-3x^3 + x^2 + 9x - 3$
 d) $-3x^4 + 3x^3 + 9x^2 - 9x$
- 400.** a) 10 (Polynomi on tulo, jossa on viisi tekijää $3t^2 - 1$. Korkeimman asteen termi on korkeimman asteen termien tulo $(3t^2)^5 = 243t^{10}$.)
 b) 243
 c) -1
 (Vakiotermi on vakiotermien tulo $(-1)^5$.)
- 401.** a) $x(3x - 1)$ b) $-2t^2(2t - 3)$
- 402.** a) $\frac{4}{2x+1} \quad (\frac{12}{3(2x+1)})$
 b) 3 $(\frac{3(2x+3)}{1(2x+3)})$
- 403.** a) $\frac{3x}{5x+1} \quad (\frac{3x^2}{x(5x+1)})$
 b) $\frac{x}{3} \quad (\frac{x(x-1)}{3(x-1)})$
- 404.** a) $9x^2 - 4$
 b) $4x^7 - 25x \quad (4x(x^6 - \frac{25}{4}))$
 c) $25 - s^2 \quad ((5-s)(5+s))$
- 405.** a) $t^2 - 5t + \frac{25}{4}$
 b) $36x^2 + 60x + 25$
 c) $25x^4 - 20x^2 + 4$
- 406.** $x < -1 \quad (x^2 + 6x + 9 < x^2 - 2x + 1)$
- 407.** a) $2x^3 - 12x^2 + 18x$
 $(2x(x^2 - 6x + 9))$
 b) $x^3 + 15x^2 + 75x + 125$
 $((x+5)(x^2 + 10x + 25))$

- 408.** a) $9 - (x^2 - (x^2 - 9))$
 b) $-a^3 + 8a^2 (16a - a(a^2 - 8a + 16))$
 $= 16a - (a^3 - 8a^2 + 16a)$
- 409.** a) $(1 + t)(1 - t)$
 b) $5(x + 4)(x - 4)$
 c) $x(x + 3)(x - 3)$
- 410.** a) $x + 5 \quad \left(\frac{(x + 5)(x - 5)}{x - 5} \right)$
 b) $\frac{x}{x - 1} \quad \left(\frac{x(x + 1)}{(x + 1)(x - 1)} \right)$
 c) $\frac{x - 1}{x + 1} \quad \left(\frac{(x - 1)^2}{(x + 1)(x - 1)} \right)$
- 411.** a) 30 b) $120 + 30\sqrt{15}$
- 412.** a) On.
 b) Ei ole, sillä luku $\sqrt{7} - 3$ on negatiivinen.
- 413.** a) $x = \frac{1}{3}$ tai $x = \frac{5}{3}$
 b) $x = 5$ tai $x = -2$
- 414.** a) $x = \frac{3}{2}$ tai $x = -1$
 (Yhtälö kannattaa ensin kertoa luvulla 6, jolloin saadaan yhtälö $2x^2 - x - 3 = 0$.)
 b) $x = \frac{-1 + \sqrt{2}}{3}$ tai $x = \frac{-1 - \sqrt{2}}{3}$
 (Yhtälö kerrotaan luvulla 9, jolloin saadaan yhtälö $9x^2 - (3x + 1) = -9x$. Juuret sievenevät, koska $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$.)
- 415.** a) $x = 1$ tai $x = -6$ (Yhtälö kerrotaan x :llä, jolloin saadaan yhtälö $6 - 5x = x^2$. Yhtälö ei ole määritelty, kun $x = 0$.)
 b) $x = -\frac{1}{3}$ (Kerrotaan ristiin tai kerrotaan nimittäjien tulolla $x(6x - 1)$. Yhtälö ei ole määritelty x :n arvoilla 0 ja $\frac{1}{6}$.)
- 416.** a) $x = \sqrt{10}$ tai $x = -\sqrt{10}$ ($x^2 = 10$)
 b) $x = \frac{5}{3}$ tai $x = -\frac{5}{3}$ ($x^2 = \frac{25}{9}$)
- 417.** a) $x = 0$ tai $x = \frac{3}{2}$ ($x(2x - 3) = 0$)
 b) $x = 0$ tai $x = -\frac{1}{3}$ ($x(3x + 1) = 0$)
 c) $x = 0$ tai $x = \frac{1}{4}$
 d) $x = -1$ tai $x = \frac{1}{4}$
 ($x + 1 = 0$ tai $4x - 1 = 0$)
- 418.** a) $a(x + 1)(x - 5) = 0$, missä a on mikä tahansa nollasta eroava luku.
 b) $P(x) = 2(x + 1)(x - 5)$ (Funktio $P(x)$ on muotoa $P(x) = a(x + 1)(x - 5)$.
 Koska $P(0) = -5a$, tulee olla $a = 2$.)
- 419.** a) $x = \frac{1 + \sqrt{2}}{3}$ tai $x = \frac{1 - \sqrt{2}}{3}$
 (Voidaan suorittaa neliöönkorotus ja käyttää ratkaisukaavaa. Voidaan myös päätellä:
 $(3x - 1)^2 = 2$, kun $3x - 1 = \sqrt{2}$ tai $3x - 1 = -\sqrt{2}$.)
 b) $x = 0$ tai $x = 2$
 (Voidaan suorittaa neliöönkorotukset. Voidaan myös päätellä: $(3x - 1)^2 = (2x + 1)^2$, kun $3x - 1 = 2x + 1$ tai $3x - 1 = -(2x + 1)$.)
- 420.** sivut 30 m ja 42 m
 (Yhtälö $x(72 - x) = 1260$.)
- 421.** 81 cm (Yhtälö $(15 + 2x)(8 + 2x) - 15 \cdot 8 = 40$, missä x on suurin mahdollinen laatoituksen leveys metreinä.)
- 422.** a) $x < -1$ tai $x > 3$
 b) $-1 < x < 0$

- 423.** a) $-7 < t < 7$ (Tutkitaan, millä muuttujan arvolla funktion $t^2 - 49$ arvot ovat negatiivisia. Funktion nollakohdat ovat 7 ja -7 , ja funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.)
 b) $t \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$ tai $t \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$
 (Tutkitaan, millä muuttujan arvoilla funktion $3t^2 - 1$ arvot ovat positiivisia. Ratkaisujoukkoon sisältyvät myös funktion nollakohdat.)
- 424.** $x < -10$ tai $x > 0$
 (On suoritettava neliöönkorotukset.)
- 425.** a) $x = -4$ (Funktioilla $x^2 + 8x + 16$ on yksi nollakohta $x = -4$, ja funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.)
 b) Epäyhtälö ei toteudu millään muuttujan x arvolla. (Funktioilla $-x^2 + x - 1$ ei ole nollakohtia, ja funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten funktion kaikki arvot ovat negatiivisia.)
 c) $x \neq 5$ (Funktioilla $-x^2 + 10x - 25$ on yksi nollakohta $x = 5$, ja funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.)
- 426.** Väli $]0, \frac{2}{3}[$ sisältyy epäyhtälön $3x^2 + x - 2 < 0$ ratkaisuväliin $] -1, \frac{2}{3}[$.
- 427.** a) 16, kaksi juurta b) 0, yksi juuri
- 428.** $q \leq \frac{49}{12}$ (Diskriminantin $D = 49 - 12q$ tulee toteuttaa ehto $D \geq 0$.)
- 429.** $a = 2\sqrt{3}$ tai $a = -2\sqrt{3}$
 (Yhtälö saatetaan muotoon $x^2 + ax + 3 = 0$. Yhtälöllä on yksi juuri, kun diskriminantti $D = 0$, missä $D = a^2 - 12$.)
- 430.** Ei nollakohtia, kun $0 < k < 4$. Saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja, kun $k < 0$ tai $k > 4$.
 (Yhtälön $x^2 + kx + k = 0$ diskriminantti on $D = k^2 - 4k$. Funktiolla ei ole nollakohtia, kun $D < 0$. Funktio saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja, kun nollakohtia on kaksi eli kun $D > 0$. Funktion $k^2 - 4k$ nollakohdat ovat 0 ja 4, ja funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.)
- 431.** $a = 7$ tai $a = -1$. Kun $a = 7$, kaksoisjuuri on $x = 3$. Kun $a = -1$, kaksoisjuuri on $x = -1$.
 (Yhtälöllä on kaksoisjuuri eli yksi juuri, kun yhtälön diskriminantti $D = (1 - a)^2 - 4(a + 2) = a^2 - 6a - 7$ on 0. Saadaan a :n arvot 7 ja -1 .
 Kun $a = 7$, yhtälö on $x^2 - 6x + 9 = 0$.
 Kun $a = -1$, yhtälö on $x^2 + 2x + 1 = 0$.)
- 432.** a) $x = 0$ tai $x = -1$ tai $x = \frac{1}{4}$, kolmannen asteen yhtälö
 b) $x = -3$ tai $x = 4$ tai $x = 5$ tai $x = -5$, seitsemannen asteen yhtälö
 (Yhtälö toteutuu, kun $x + 3 = 0$ tai $x - 4 = 0$ tai $x^4 - 625 = 0$ eli kun $x = -3$ tai $x = 4$ tai $x = \sqrt[4]{625} = 5$ tai $x = -\sqrt[4]{625} = -5$.)
- 433.** $Q(x) = -3(x + 3)(x + 2)(x - 1)$
 (Muotoa $Q(x) = a(x + 3)(x + 2)(x - 1)$ olevalla kolmannen asteen polynomifunktiolla on haluttu nollakohdat. $Q(-1) = a \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-2) = -4a$, joten tulee olla $-4a = 12$.)
- 434.** a) $x = 0$ tai $x = -3$ tai $x = -7$
 ($x(x^2 + 10x + 21) = 0$)
 b) $x = 0$ tai $x = 1$ tai $x = -1$
 ($x(x^2 - 1) = 0$)
 c) $x = 0$ tai $x = 5$
 ($x^2(x^2 - 10x + 25) = 0$)

435. $x = 0$ tai $x = \sqrt{2}$ tai $x = -\sqrt{2}$ tai $x = -1$ tai $x = -2$
(Yhtälö on $(x^2 - 2)x(x^2 + 3x + 2) = 0$, joten se toteutuu, kun $x^2 - 2 = 0$ tai $x = 0$ tai $x^2 + 3x + 2 = 0$.)

436. a) $x < -4$ tai $-1 < x < 0$
(Funktion nollakohdat ovat -4 , -1 ja 0 .
Laaditaan merkkikaavio laskemalla funktion yksi arvo jokaiselta väliltä
] $-\infty, -4$ [, $]-4, -1$ [, $]-1, 0$ [ja $]0, \infty$ [.)
b) $-\frac{1}{2} < x < 0$ tai $x > \frac{1}{2}$

437. a) $-\frac{1}{2} < x < 0$ tai $x > 1$ (Tutkitaan, millä muuttujan arvoilla funktion $2x^3 - x^2 - x$ arvot ovat positiivisia.)
b) $x \leq 0$ tai $x = 1$ (Tutkitaan, millä muuttujan arvoilla funktion $x^3 - 2x^2 + x$ arvot ovat negatiivisia. Ratkaisujoukkoon sisältyvät lisäksi funktion nollakohdat.)

438. a) $\mathbb{R} \setminus \{-5, 0, 4\}$ eli tulee olla $x \neq -5$ ja $x \neq 0$ ja $x \neq 4$ (Funktio ei ole määritelty nimittäjän nollakohdassa.)
b) Määrittelyehto: $-5 \leq x \leq 0$ tai $x \geq 4$
(Funktio on määritelty, kun $x^3 + x^2 - 20x \geq 0$.)

439. a) $(x - 5)(x + 7)$
b) jaoton
c) $12(x - \frac{2}{3})(x + \frac{3}{4}) = (3x - 2)(4x + 3)$
d) $9(x + \frac{2}{3})^2 = (3x + 2)^2$

440. $\frac{x+6}{x+4} = \frac{(x-4)(x+6)}{(x+4)(x-4)}$

441. $a = -3$,
 $2x^2 - 3x - 5 = 2(x + 1)(x - \frac{5}{2}) = (x + 1)(2x - 5)$
(Polynomilla on tekijä $x + 1$, jos ja vain jos -1 on polynomin nollakohta. Vakio a saadaan siis yhtälöstä $2 \cdot (-1)^2 + a(-1) - 5 = 0$.)

Sarja A

1. $x > -\frac{3}{4}$ (Kun epäyhtälö kerrotaan positiivisella luvulla 3, se tulee muotoon $3 - (x + 6) < 3x$ ja edelleen muotoon $3 - x - 6 < 3x$.)

2. -104 (Funktio $P(x)$ on muotoa $P(x) = a(x + 6)(x - 5)$, jolloin $P(-1) = a \cdot 5 \cdot (-6) = -30a$.
Koska $P(-1) = 120$, niin $a = -4$ ja $P(7) = -4 \cdot 13 \cdot 2 = -104$.)

3. a) $x = \sqrt{3}$ tai $x = -\sqrt{3}$ tai $x = 0$ tai $x = \frac{1}{2}$

b) $x < -\sqrt{3}$ tai $0 < x < \frac{1}{2}$ tai $\frac{1}{2} < x < \sqrt{3}$

(Nollakohdat saadaan tulon nollasäännön avulla. Epäyhtälön ratkaisu nähdään merkkikaaviosta.)

4. Merkitään lukuja esimerkiksi $n + 2$ ja n .
Tällöin $n(n + 2) + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$.
Jos lukuja merkitään n ja $n - 2$, niin $n(n - 2) + 1 = n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2$.
Jos lukuja merkitään $n + 1$ ja $n - 1$, niin $(n + 1)(n - 1) + 1 = n^2 - 1 + 1 = n^2$.

5. 3,7 m (Olkoon x käytävän leveys metreinä.
Jos käytävien pinta-ala ilmaistaan muuttujan x lausekkeena, saadaan yhtälö

$$32x + 24x - x^2 = \frac{1}{4} \cdot 32 \cdot 24.$$

Jos käytävien ulkopuolisen alueen pinta-ala ilmaistaan muuttujan x lausekkeena, saadaan yhtälö

$$(32 - x)(24 - x) = \frac{3}{4} \cdot 32 \cdot 24.$$

Kumpikin yhtälö sievenee muotoon $x^2 - 56x + 192 = 0$.)

6. a) $a \leq -2$ tai $a \geq 2$ (Kertomalla x :llä ($x \neq 0$) saadaan yhtälö $x^2 - ax + 1 = 0$, jonka diskriminantti on $D = a^2 - 4$. Yhtälöllä $x^2 - ax + 1 = 0$ on ainakin yksi juuri, kun $D \geq 0$. Luku 0 ei toteuta yhtälöä $x^2 - ax + 1 = 0$ millään a :n arvolla, joten yhtälön $x^2 - ax + 1 = 0$ juuri on myös yhtälön $x + \frac{1}{x} = a$ juuri.)
- b) 2 (Luvun x ja sen käänteisluvun summa on $x + \frac{1}{x}$. Jos x on positiivinen, niin summa on positiivinen. Koska a-kohdan nojalla mikään luku ei toteuta yhtälöä $x + \frac{1}{x} = a$, kun $0 < a < 2$, niin positiivisen luvun ja sen käänteisluvun summa on aina vähintään 2.)

Sarja B

1. Luvuilla, jotka ovat välillä $-1 < x < 0$.
(Ratkaistaan toisen asteen epäyhtälö $x^2 < -x$ eli $x^2 + x < 0$. Funktion $x^2 + x$ nollakohdat ovat -1 ja 0 , ja kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.)
2. Supistuu muotoon $\frac{x-2}{2x+1}$.
(Osoittajan $x^2 - x - 2$ nollakohdat ovat 2 ja -1 , joten $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$. Nimittäjän $2x^2 + 3x + 1$ nollakohdat ovat $-\frac{1}{2}$ ja -1 , joten $2x^2 + 3x + 1 = 2(x + \frac{1}{2})(x+1)$. Lauseke supistuu osoittajan ja nimittäjän yhteisellä tekijällä $x+1$.)
3. Merkitään lukuja n ja $n+1$ (tai n ja $n-1$).
Tällöin $n^2 + 4(n+1) = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$ ja $(n+1)^2 - 4n = n^2 + 2n + 1 - 4n = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$.

4. $a < -12$ (Epäyhtälö $2(x-a) \leq 6x-a$ toteutuu, kun $x \geq -\frac{a}{4}$, eli epäyhtälön ratkaisujoukko on väli $[-\frac{a}{4}, \infty[$. Ratkaisujoukko sisältyy väliin $]3, \infty[$, kun $-\frac{a}{4} > 3$.)

5. sivut 26 m ja 54 m
(Jos toisen sivun pituus on x metriä, niin toisen sivun pituus on $80 - x$. Ratkaistaan yhtälö $50x(80 - x) = 70\,000$.)

6. Yhtälö on toisen asteen yhtälö
 $x^2 - (a+b)x + ab - 1 = 0$.
Yhtälön diskriminantti on
 $(a+b)^2 - 4(ab-1) = a^2 - 2ab + b^2 + 4$
 $= (a-b)^2 + 4$.
Koska luvun neliö on aina suurempi tai yhtä suuri kuin nolla, niin $(a-b)^2 + 4 > 0$ kaikilla a :n ja b :n arvoilla. Siis yhtälöllä on aina kaksi eri suurta juurta.

Sarja C

1. $5 - 2\sqrt{7}$
(Koska $3 - \sqrt{7} \approx 0,4 > 0$ ja $2 - \sqrt{7} \approx -0,6 < 0$, niin $|3 - \sqrt{7}| = 3 - \sqrt{7}$ ja $|2 - \sqrt{7}| = -(2 - \sqrt{7}) = -2 + \sqrt{7}$. Siis $|3 - \sqrt{7}| - |2 - \sqrt{7}| = 3 - \sqrt{7} - (-2 + \sqrt{7})$.)
2. $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ tai $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ (Yhtälö $x(x-3)=1$ tai yhtälö $x-3=\frac{1}{x}$, missä $x \neq 0$.)
3. Koska n on pariton kokonaisluku, niin $n = 2k + 1$, missä k on kokonaisluku. Tällöin $n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4(k^2 + k)$ ja $n^2 + 3 = 4k^2 + 4k + 4 = 4(k^2 + k + 1)$, joten murtoluku $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 3}$ supistuu osoittajan ja nimittäjän yhteisellä tekijällä 4.

4. leveys 20 cm ja pituus 40 cm
(Olkoot arkin leveys x ja pituus $2x$ senttimetriä.
Rasian pohjasärmien pituudet ovat
 $x - 10$ ja $2x - 10$ ja rasian korkeus 5, joten arkin tilavuus on $5(2x - 10)(x - 10)$. Ratkaistaan yhtälö $5(2x - 10)(x - 10) = 1\,500$.)

5. arvoilla $2\sqrt{2}$ ja $-2\sqrt{2}$.

Kun $a = 2\sqrt{2}$, juuri on $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Kun $a = -2\sqrt{2}$, juuri on $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(Yhtälö saadaan muotoon $2x^2 - ax + 1 = 0$.

Yhtälön diskriminantti on

$D = (-a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = a^2 - 8$. Juuria on yksi, kun

$D = 0$ eli kun $a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ tai

$a = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$.

Kun $a = 2\sqrt{2}$, yhtälö on $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$.

Kun $a = -2\sqrt{2}$, yhtälö on $2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0$.)

6. 24 (Lukujen a ja b summan kuutio on $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Summan kuution ja kuutioiden summan erotus on $3a^2b + 3ab^2$. Erotus jaettuna lukujen summalla on $\frac{3a^2b + 3ab^2}{a + b} = \frac{3ab(a + b)}{a + b} = 3ab$. Siis tulokseksi saadaan lukujen $3 - \sqrt{5}$ ja $6 + 2\sqrt{5}$ kolminkertainen tulo.)

Sarja D

1. $x > \frac{19}{8}$

(Kun epäyhtälö kerrotaan positiivisella luvulla 10, saadaan epäyhtälö $20 - (3x - 4) < 5(x + 1)$.)

2. a) Kahta peräkkäistä paritonta luonnollista lukua voidaan merkitä $2k - 1$ ja $2k + 1$, missä k on positiivinen kokonaisluku. Koska $(2k + 1)^2 - (2k - 1)^2 = 8k$, niin neliöiden erotus on jaollinen luvulla 8.

b) Voidaan, luvut ovat 501 ja 503.

(Koska $8k = 2008$, kun $k = 251$, niin $2008 = 503^2 - 501^2$.)

3. $x = -2$ tai $x = -1$ tai $x = 0$ tai $x = 1$ (Yhtälö toteutuu, kun $x^2 + x - 1 = 1$ tai $x^2 + x - 1 = -1$.)

4. $t > -4$ (Yhtälön $\frac{x-t}{2} = 3$ juuri on $x = 6 + t$, ja

epäyhtälö $\frac{1}{3} - \frac{x}{6} < \frac{x-2}{2}$ toteutuu, kun $x > 2$.)

Siis tulee olla $6 + t > 2$. Voidaan myös sijoittaa yhtälön juuri epäyhtälöön, jolloin saadaan epä-

yhtälö $\frac{1}{3} - \frac{6+t}{6} < \frac{4+t}{2}$.)

5. enintään 73 cm langan päästä (Jos osien pituudet ovat x ja $4 - x$, niin tulee olla

$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{4-x}{4}\right)^2 > 0,70$ eli $2x^2 - 8x + 4,8 > 0$.)

Funktion $2x^2 - 8x + 4,8$ nollakohtien likiarvot ovat 0,735 ja 3,265. Koska kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, epäyhtälö toteutuu, kun (likimäärin) $x < 0,735$ tai $x > 3,265$.)

6. $-2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3}$ (Nimittäjällä ei saa olla nollakohtia, joten yhtälön $3x^2 + ax + 1 = 0$ diskriminantin $a^2 - 12$ tulee olla negatiivinen.)

Sarja E

1. a) $x < -\frac{1}{6}$

(On suoritettava neliöönkorottamiset.)

b) $x = 0$ tai $x = 1$ tai $x = -1$

(Saatetaan yhtälö muotoon $x(x^2 - 1) = 0$ ja käytetään tulon nollasääntöä.)

2. Epäyhtälö $2n^2 + 49 > 20n$ toteutuu, kun

$$n < \frac{10 - \sqrt{2}}{2} \approx 4,3 \text{ tai } n > \frac{10 + \sqrt{2}}{2} \approx 5,7.$$

Ratkaisujoukossa ovat kaikki muut kokonaisluvut paitsi luku 5.

3. $a = -1$, jolloin muita juuria ei ole, tai $a = -2$, jolloin toinen juuri on 1.

(Sijoittamalla $x = 3$ saadaan yhtälö

$$3a^2 + 9a + 6 = 0, \text{ joka toteutuu, kun } a = -1 \text{ tai } a = -2. \text{ Vastaavat yhtälöt ovat } x - 3 = 0 \text{ ja } -x^2 + 4x - 3 = 0.)$$

4. Kummankin funktion määrittelyjoukko on väli $]-\infty, -\frac{2}{3}]$ eli määrittelyehto on $x \leq -\frac{2}{3}$. Arvot

$$\text{ovat toistensa käänteislukuja, kun } x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}.$$

(Molemmat funktiot ovat määriteltyjä, kun juurrettava $-2 - 3x \geq 0$. Arvot ovat käänteislukuja, kun niiden tulo on 1 eli

$$(x + \sqrt{-2 - 3x})(x - \sqrt{-2 - 3x}) = 1.$$

Muistikaavalla yhtälö saadaan muotoon

$$x^2 - (-2 - 3x) = 1 \text{ eli } x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Yhtälön juurista $\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$ ja $\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ jälkimmäinen on funktioiden määrittelyjoukossa.)

5. Kolme juurta, kun $a < 0$ tai $0 < a < \frac{1}{4}$,

kaksi juurta, kun $a = 0$ tai $a = \frac{1}{4}$ ja

yksi juuri, kun $a > \frac{1}{4}$.

(Jos $a = 0$, niin yhtälö on toisen asteen yhtälö $x^2 + x = 0$, jolla on kaksi juurta $x = 0$ ja $x = -1$. Oletetaan, että $a \neq 0$. Tällöin yhtälö toteutuu, kun $x = 0$ tai $ax^2 + x + 1 = 0$. Koska luku 0 ei toteuta yhtälöä $ax^2 + x + 1 = 0$, alkuperäisellä yhtälöllä on juuria yksi enemmän kuin toisen asteen yhtälöllä $ax^2 + x + 1 = 0$. Tulokseen päädytään tutkimalla yhtälön $ax^2 + x + 1 = 0$ diskriminanttia $1 - 4a$.)

6. lyhyempi kuin 2,2 m

(Jos x on seinää jatkavan aidan pituus metreinä, niin aitauksen sivujen pituudet ovat $x + 3$ ja $0,5(12 - (x + x + 3)) = 4,5 - x$. Saadaan epäyhtälö $(x + 3)(4,5 - x) > 12$ eli epäyhtälö $-x^2 + 1,5x + 1,5 > 0$. Funktion $-x^2 + 1,5x + 1,5$ nollakohtien likiarvot ovat 2,19 sekä -0,69 ja funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.)

Hakemisto

binomi	33	kolmannen ja korkeamman asteen epäyhtälön ratkaiseminen	108
diskriminantti	94	kompleksiluvut	121
epäyhtälö		kompleksitaso	121
säilyminen laskutoimituksissa	16	kultainen leikkaus	76
ensimmäisen asteen epäyhtälön ratkaiseminen	17	merkkikaavio	107
toisen asteen epäyhtälön ratkaiseminen	85	monomi	
kolmannen ja korkeamman asteen epäyhtälön ratkaiseminen	108	määritelmä	32
epäyhtälömerkit	10	monomien summa	37
erotuksen neliö	55	monomien tulo	41
funktio		monomin ja polynomin tulo	42
määritelmä	25	muuttuja	25
funktion arvo	25	nollakohta	27
määrittelyjoukko	25	nollakohtien ja tekijöiden yhteys	117
kuvaaja	26	paraabeli	60
määrittelyehto	27	paraabelin huippu	60
arvojen merkin päättelyminen		paraabelin aukeamissuunta	60
kuvaajasta	83	Pascalin kolmio	59
imaginaariakseli	121	polynomi	
imaginaariyksikkö	121	määritelmä	32
irrationaaliluku	8	polynomin termi	32
itseisarvo	12	polynomin asteluku	32
kaksoisepäyhtälö	9	polynomien summa	37
kaksoisjuuri	112	polynomien erotus	38
kiintopiste	98	polynomien osamäärän supistaminen .	44
kolmannen ja korkeamman asteen yhtälön ratkaiseminen	105	polynomien tulo	46

polynomifunktio		toisen asteen yhtälö	
määritelmä	33	määritelmä	64
määrittelyjoukko	33	yhtälö $ax^2 + c = 0$	65
ensimmäisen asteen polynomifunktion		ratkaiseminen neliöksi täydentämällä .	67
kuvaaja	36	ratkaisukaava	70
toisen asteen polynomifunktion		juurten lukumäärän tutkiminen	94
kuvaaja	60	yhtälö $ax^2 + bx = 0$	101
		ratkaiseminen kompleksialueella	123
polynomi yhtälön juurten lukumäärä	117	toisen asteen epäyhtälön ratkaiseminen . .	85
ratkaisujoukko	13	trinomi	57
reaaliluku	8	tulon nollasääntö	100
summan ja erotuksen tulo	48	vakiofunktio	
summan neliö	55	määritelmä	35
tekijöihin jakaminen		kuvaaja	35
yhteisen tekijän erottaminen	43	väli	10
muistikaavan käyttö	50	välin merkinnät	10
tekijöihin jakaminen nollakohtien			
avulla	112		
toisen asteen polynomifunktio			
kuvaaja	60		
merkin tutkiminen	83		
jakaminen tekijöihin	112		